Universität Ulm

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Elemente der Algebra: Blatt 9

A1. Sei R ein Integritätsring (also ein kommutativer Ring, welcher nullteilerfrei ist).

(a) Zeigen Sie: Für $a, b, c \in R$ mit $ac = bc$ und $c \neq 0$ gilt $a = b$. (5)

(b) Sei X die Menge der Paare (a, b) mit $a, b \in R$ und $b \neq 0$. Auf X sei die Relation

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X definiert. (5)

(ii) Sei K nun die Menge der Äquivalenzklassen von X bezüglich $\sim$, d.h. sei $K = X/\sim$. Die Klasse von (a, b) bezeichnen wir nun mit $\frac{a}{b}$. Definieren Sie auf K eine Addition und Multiplikation, sodass ein Körper entsteht (sie müssen hierzu nicht die Ringaxiome (R1)-(R3) überprüfen). Machen Sie in Ihrer Konstruktion deutlich an welcher Stelle benötigt wurde, dass R kommutativ ist und an welcher Stelle benötigt wurde, dass R nullteilerfrei ist. (10)

A2. Bestimmen Sie im euklidischen Ring R den größten gemeinsamen Teiler der Element a, b und finden Sie Elemente $x, y \in R$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = xa + yb$.

(a) Für $R = \mathbb{Z}, a = 91, b = 154$. (7)

(b) Für $R = \mathbb{Q}[x], a = x^4 - 3x^2 + 2, b = 3x^3 + x^2 - 6x - 2$. (7)

(c) Für $R = \mathbb{Z}[i], a = 2, b = 1 - 7i$. (7)

Abgabe bitte nur zu zweit am Montag, 16.12.2013 in der Übung. Beschriften Sie ihre Abgabe mit Namen und Matrikelnummer (oder SLC-Namen) beider Studenten. **Achten Sie auf einen ausreichenden Seitenrand für die Korrektur.**