# Lösungen Elemente der Algebra: Blatt 9

**A1.** Sei $R$ ein Integritätsring (also ein kommutativer Ring, welcher nullteilerfrei ist).

(a) Zeigen Sie: Für $a, b, c \in R$ mit $ac = bc$ und $c \neq 0$ gilt $a = b$. (5)

**Lösung:** Es ist $ac - bc = 0$ und also $(a-b)c = 0$. Da $R$ keine Nullteiler besitzt muss $a - b = 0$ gelten.

(b) Sei $X$ die Menge der Paare $(a, b)$ mit $a, b \in R$ und $b \neq 0$. Auf $X$ sei die Relation

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ definiert. (5)

**Lösung:** Die Relation ist offensichtlich reflexiv und symmetrisch. Für die Transitivität sei $(a, b) \sim (a', b')$ und $(a', b') \sim (a'', b'')$ gegeben. Somit gilt $ab'b'' = a'bb'' = a'b''b = a''b'b$. Da $b' \neq 0$ folgt mit der ersten Teilaufgabe $ab'' = a''b$ was zu zeigen war.

(ii) Sei $K$ nun die Menge der Äquivalenzklassen von $X$ bezüglich $\sim$, d.h. sei $K = X/\sim$. Die Klasse von $(a, b)$ bezeichnen wir nun mit $\frac{a}{b}$. Definieren Sie auf $K$ eine Addition und Multiplikation, sodass ein Körper entsteht (sie müssen hierzu nicht die Ringaxiome (R1)-(R3) überprüfen). Machen Sie in Ihrer Konstruktion deutlich an welcher Stelle benötigt wurde, dass $R$ kommutativ ist und an welcher Stelle benötigt wurde, dass $R$ nullteilerfrei ist. (10)

**Lösung:** Setze $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+cb}{bd}$ und $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$. Diese Operationen sind wohldefiniert: Sei $\frac{a'}{b'}$ ein Repräsentant von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c'}{d'}$ ein Repräsentant von $\frac{c}{d}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} &= \frac{a'd' + c'b'}{b'd'} \\
&= \frac{a'd'b + c'b'b}{b'd'b} && \text{nach Definition von } \sim\text{, da } b \neq 0 \\
&= \frac{a'bd' + c'bb'}{bd'} && \text{da } R \text{ kommutativ} \\
&= \frac{ab'd' + c'b'b}{b'd'b} && \text{da } \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \\
&= \frac{ad' + c'b}{d'b} && \text{nach Definition von } \sim\text{, da } d' \neq 0 \\
&= \frac{ad'd + c'bd}{d'bd} && \text{wie in Zeile 2} \\
&= \frac{add' + c'db}{bdd'} && \text{wie in Zeile 3} \\
&= \frac{add' + cd'b}{bdd'} && \text{wie in Zeile 4} \\
&= \frac{ad + cb}{bd} && \text{wie in Zeile 5.}
\end{aligned}$$

Ähnlich gilt

$$\begin{aligned}\frac{a'}{b'}\frac{c'}{d'} &= \frac{a'c'}{b'd'} \\ &= \frac{a'c'bd}{b'd'bd} \\ &= \frac{a'bc'd}{bdb'd'} \\ &= \frac{ab'cd'}{bdb'd'} \\ &= \frac{acb'd'}{bdb'd'} \\ &= \frac{ac}{bd}.\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass ein $\frac{a}{b} \neq 0 \in K$ ein Inverses besitzt. Da $\frac{a}{b} \neq 0 = \frac{0}{b}$ ist $ab \neq 0$ also $a \neq 0$, da $R$ nullteilerfrei ist. Es ist also $\frac{b}{a} \in K$ und offensichtlich gilt $\frac{a}{b}\frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1} = 1$.

**A2.** Bestimmen Sie im euklidischen Ring $R$ den größten gemeinsamen Teiler der Element $a, b$ und finden Sie Elemente $x, y \in R$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = xa + yb$.

(a) Für $R = \mathbb{Z}, a = 91, b = 154$. (7)

**Lösung:** Durch wiederholte Division mit Rest findet man

$$\begin{aligned}154 &= 63 + 91 \\ 91 &= 28 + 63 \\ 63 &= 7 + 2 \cdot 28 \\ 28 &= 4 \cdot 7\end{aligned}$$

Es ist also der größte gemeinsame Teiler 7. Obigen Rechnungen entnimmt man

$$\begin{aligned}7 &= 63 - 2 \cdot 28 \\ &= 63 - 2(91 - 63) \\ &= 3 \cdot 63 - 2 \cdot 91 \\ &= 3 \cdot 154 - 5 \cdot 91\end{aligned}$$

(b) Für $R = \mathbb{Q}[x], a = x^4 - 3x^2 + 2, b = 3x^3 + x^2 - 6x - 2$. (7)

**Lösung:** Durch wiederholte Division mit Rest findet man

$$\begin{aligned}a &= (1/3x - 1/9)b + 8/9x^2 + 16/9 \\ b &= (-27/8x - 9/8)(8/9x^2 + 16/9).\end{aligned}$$

Somit ist $ggT(a, b) = 8/9x^2 + 16/9$ und es ist $8/9x^2 + 16/9 = (1/3x - 1/9)b - a$.

(c) Für $R = \mathbb{Z}[i], a = 2, b = 1 - 7i$. (7)

**Lösung:** Man überlegt sich, dass $(x + iy)^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$. Für die Division mit Rest berechnet man $b/a = -7/2i + 1/2$. Das Element von $Z[i]$ welches diesem an *nächsten* ist, ist $-3i$. Man bestimmt also $b = -3i \cdot a + 1 - i$. Die Division mit Rest von $a$ durch $1 - i$ geht auf. Es ist also $ggT(a, b) = 1 - i$ und $1 - i = -3i \cdot a - b$.