
Elemente der Algebra: Klausur am 3.3.2014

A1. Seien

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Elemente von S_5 .

- (a) Schreiben Sie $\sigma, \tau, \sigma\tau, \tau\sigma$ in Zykeldarstellung und bestimmen Sie jeweils das Vorzeichen. (3)
- (b) Sei $G := \langle \sigma, \tau \rangle$ die von σ und τ erzeugte Untergruppe von S_5 . Wie viele Elemente besitzt G ? (3)
- (c) Es bezeichne e das neutrale Element in G . Geben Sie Elemente $\sigma_1, \sigma_2 \in G \setminus \{e\}$ an mit $\sigma_1 \neq \sigma_2$ und $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$. (2)

A2. Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

- (a) Sei $\sigma \in G$ mit $\text{ord}(\sigma) = |G|$. Dann ist G zyklisch. (3)
- (b) Sei G abelsch und seien $\sigma, \tau \in G$. Dann sind σ und τ konjugiert. (3)

A3. Wie viele Möglichkeiten gibt es 7 Kerzen kreisförmig auf einem Geburtstagskuchen anzuordnen, wenn rote, grüne und gelbe Kerzen zu Verfügung stehen? (Hinweis: Führt eine Spiegelung auf eine sinnvolle Symmetrie eines Geburtstagskuchens?) (6)**A4.** Welche der folgenden Ideale sind Hauptideale von R ? Finden Sie gegebenenfalls einen Erzeuger des Hauptideals.

- (a) $R = \mathbb{Z}, I = (4, -8, 42)$ (2)
- (b) $R = \mathbb{Q}[x], I = (x^2 + x + 1, x - 1)$ (2)
- (c) $R = \mathbb{F}_{p^n}[x], I = (x^{p^n} - x, x^p - x)$ (2)

A5. Sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal von R . Sei (6)

$$J := \{a \in R : \text{es existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n \in I\}.$$

Zeigen Sie, dass J ein Ideal von R ist.**A6.** Es ist $f := x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ irreduzibel. Sei $\alpha \in \mathbb{F}_8$ eine Nullstelle von f . Es ist also $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[\alpha]$.

- (a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α^2, α^3 und α^8 über $\mathbb{F}_2$. (4)
- (b) Gibt es ein Element $\beta \in \mathbb{F}_2[\alpha]$ mit $\mathbb{F}_2[\beta] = \mathbb{F}_4$? Falls ja, bestimmen Sie ein solches Element. (3)
- (c) Bestimmen Sie einen Erzeuger von $(\mathbb{F}_2[\alpha])^\times$. (3)

A7. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (Beantworten Sie die Fragen ohne Begründung; Die Lösung jeder Teilaufgabe soll also nur aus dem Wort *wahr* oder dem Wort *falsch* bestehen. Für jede richtige Lösung erhalten Sie 2 Punkte, für jede falsche Lösung werden Ihnen 2 Punkte abgezogen. Insgesamt können Sie jedoch nicht weniger als 0 Punkte erhalten.)

- (a) Sei G eine abelsche Gruppe. Dann sind $\{e\}$ und G die einzigen Normalteiler von G . (± 2)
- (b) Sei G eine Gruppe, die nicht nur aus dem neutralen Element besteht. Dann gibt es (± 2)
 $a, b \in G$ die nicht konjugiert sind.
- (c) Sei R ein euklidischer Ring, $a, b, c \in R$. Dann gilt (± 2)

$$\text{ggT}(a, \text{kgV}(b, c)) = \text{kgV}(a, \text{ggT}(b, c)).$$

- (d) Sei K ein Körper und $f = x^{p^n} - x \in K[x]$ für eine Primzahl p und eine natürliche (± 2)
Zahl n . Zerfällt f über K in Linearfaktoren, dann ist K ein endlicher Körper mit
 p^n Elementen.

Es können bei der Klausur insgesamt 50 Punkte erreicht werden. Erreichen Sie 20 oder mehr Punkte, haben Sie die Klausur bestanden. Es sind, neben Schreibzeug und Würfeln, keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Viel Erfolg!