Universität Ulm

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Lösungen Elemente der Algebra: Klausur am 3.3.2014

A1. Seien

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

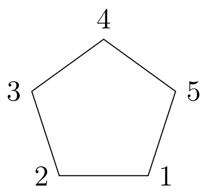
Elemente von S_5.

(a) Schreiben Sie $\sigma, \tau, \sigma\tau, \tau\sigma$ in Zykeldarstellung und bestimmen Sie jeweils das Vorzeichen. (3)

Lösung: Es ist $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\tau = (1\ 2)(3\ 5)$, $\sigma\tau = (1\ 3)(4\ 5)$, $\tau\sigma = (2\ 5)(3\ 4)$. Das Vorzeichen ist jeweils 1.

(b) Sei $G := \langle \sigma, \tau \rangle$ die von σ und τ erzeugte Untegruppe von S_5. Wie viele Elemente besitzt G? (3)

Lösung: Es ist G die Symmetriegruppe des regulären Fünfecks aus der Abbildung. Somit besitzt G zehn Elemente.



(c) Es bezeichne e das neutrale Element in G. Geben Sie Elemente $\sigma_1, \sigma_2 \in G \setminus \{e\}$ an mit $\sigma_1 \neq \sigma_2$ und $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$. (2)

Lösung: Die Bedingung ist für $\sigma_1 = \sigma$,$\sigma_2 = \sigma^2$ offensichtlich erfüllt.

A2. Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(a) Sei $\sigma \in G$ mit $\mathrm{ord}(\sigma) = |G|$. Dann ist G zyklisch. (3)

Lösung: Es ist $G = \{\sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{|G|}\}$. (Diese Menge enthält keine Duplikate, denn ist $\sigma^a = \sigma^b$, dann gilt $e = \sigma^{b-a}$ und somit gilt $|G|$ teilt $b - a$.)

(b) Sei G abelsch und seien $\sigma, \tau \in G$. Dann sind σ und τ konjugiert. (3)

Lösung: Die Aussage ist falsch. In $\mathbb{Z}$ sind 1 und 0 nicht konjugiert, denn sonst gäbe es ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $a + 0 - a = 1$.

A3. Wie viele Möglichkeiten gibt es 7 Kerzen kreisförmig auf einem Geburtstagskuchen anzuordnen, wenn rote, grüne und gelbe Kerzen zu Verfügung stehen? (Hinweis: Führt eine Spiegelung auf eine sinnvolle Symmetrie eines Geburtstagskuchens?) (6)

Lösung: Sei $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \subseteq S_7$, die von $(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)$ erzeugte Gruppe. Sei $X := \{\{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3\}\}$. Es wirkt G auf X vermittels $(\sigma \cdot f)(i) = f(\sigma^{-1}(i))$. Es ist $|X^e| = 3^7$. Für die anderen 6 Element von G gilt $|X^g| = 3$. Nach dem Burnside-Lemma ist also $|X/G| = \frac{1}{7}(3^7 + 3 \cdot 6) = 315$.

A4. Welche der folgenden Ideale sind Hauptideale von R? Finden Sie gegebenenfalls einen Erzeuger des Hauptideals.

(a) $R = \mathbb{Z}$, $I = (4, -8, 42)$ (2)

Lösung: R ist ein Hauptidealring, somit ist I ein Hauptideal. Es wird erzeugt von $\mathrm{ggT}(4, -8, 42) = 2$.

(b) $R = \mathbb{Q}[x]$, $I = (x^2 + x + 1, x - 1)$ (2)

Lösung: R ist ein Hauptidealring, somit ist I ein Hauptideal. Es wird erzeugt von $\mathrm{ggT}(x^2 + x + 1, x - 1) = 1$.

(c) $R = \mathbb{F}_{p^n}[x]$, $I = (x^{p^n} - x, x^p - x)$ (2)

Lösung: R ist ein Hauptidealring, somit ist I ein Hauptideal. Da $x^p - x | x^{p^n} - x$ wird es erzeugt von $x^p - x$.

A5. Sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal von R. Sei (6)

$$J := \{a \in R : \text{ es existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n \in I\}.$$

Zeigen Sie, dass J ein Ideal von R ist.

Lösung: Sei $a, b \in J$. Dann gibt es n, m mit $a^n, b^m \in I$. Es ist $(a+b)^{n+m} = \sum_k \binom{n+m}{k} a^k b^{n+m-k} \in I$, denn in jedem Summand ist der Exponent von a größer oder gleich n oder der Exponent von b größer oder gleich m und somit der Summand in I. Damit ist $a + b \in J$. Insgesamt ist also $(J, +)$ eine abelsche Gruppe.

Sei nun $a \in I, r \in R$. Dann gibt es n mit $a^n \in I$. Es ist also $(ra)^n = r^n a^n \in I$, da I ein Ideal ist und somit ist $ra \in I$.

Dies zeigt, dass J ein Ideal ist.

A6. Es ist $f := x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ irreduzibel. Sei $\alpha \in \mathbb{F}_8$ eine Nullstelle von f. Es ist also $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[\alpha]$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α^2, α^3 und α^8 über $\mathbb{F}_2$. (4)

Lösung: Es ist f das Minimalpolynom von α^2 und α^8.
Es ist $\alpha^3 = \alpha^2 + 1$, $\alpha^6 = \alpha^2 + \alpha$, $\alpha^9 = \alpha^2$. Somit ist $\alpha^9 + \alpha^3 + 1 = 0$. Das Polynom $g(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ hat eine Nullstelle bei α^3. Da dieses Polynom irreduzibel ist, ist es das Minimalpolynom von α^3.

(b) Gibt es ein Element $\beta \in \mathbb{F}_2[\alpha]$ mit $\mathbb{F}_2[\beta] = \mathbb{F}_4$? Falls ja, bestimmen Sie ein solches Element. (3)

Lösung: Nein, denn 2 teilt nicht 3.

(c) Bestimmen Sie einen Erzeuger von $(\mathbb{F}_2[\alpha])^\times$. (3)

Lösung: Da die Einheitengruppe zyklisch von Ordnung sieben ist, ist jedes Element (außer der 1) ein Erzeuger.

A7. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (Beantworten Sie die Fragen ohne Begründung; Die Lösung jeder Teilaufgabe soll also nur aus dem Wort *wahr* oder dem Wort *falsch* bestehen. Für jede richtige Lösung erhalten Sie 2 Punkte, für jede falsche Lösung werden Ihnen 2 Punkte abgezogen. Insgesamt können Sie jedoch nicht weniger als 0 Punkte erhalten.)

(a) Sei G eine abelsche Gruppe. Dann sind $\{e\}$ und G die einzigen Normalteiler von G. (± 2)

Lösung: Falsch. [Zum Beispiel hat $\mathbb{Z}$ den Normalteiler $2\mathbb{Z}$.]

(b) Sei G eine Gruppe, die nicht nur aus dem neutralen Element besteht. Dann gibt es $a, b \in G$ die nicht konjugiert sind. (± 2)

Lösung: Wahr. [Das neutrale Element ist mit keinem anderen Element der Gruppe konjugiert.]

(c) Sei R ein euklidischer Ring, $a, b, c \in R$. Dann gilt (±2)

$$\operatorname{ggT}(a, \operatorname{kgV}(b, c)) = \operatorname{kgV}(a, \operatorname{ggT}(b, c)).$$

Lösung: Falsch. [In $\mathbb{Z}$ ist zum Beispiel $1 \operatorname{ggT}(1, \operatorname{kgV}(2, 2)) \neq \operatorname{kgV}(1, \operatorname{ggT}(2, 2)) = 2$.]

(d) Sei K ein Körper und $f = x^{p^n} - x \in K[x]$ für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl n. Zerfällt f über K in Linearfaktoren, dann ist K ein endlicher Körper mit p^n Elementen. (±2)

Lösung: Falsch. [$\mathbb{C}$ erfüllt zum Beispiel diese Bedingung; oder auch $\mathbb{F}_{p^{2n}}$.]