Universität Ulm

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Lösungen Elemente der Algebra: Klausur am 22.4.2014

A1. Seien

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Elemente von S_5.

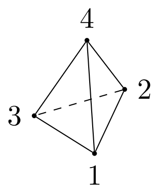
(a) Bestimmen Sie die Zykeldarstellung und das Vorzeichen von $\sigma, \tau, \sigma\tau, \tau\sigma$. (3)

Lösung: Es ist $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\tau = (2\ 5)(3\ 4)$, $\sigma\tau = (1\ 2)(3\ 5)$, $\tau\sigma = (1\ 5)(2\ 4)$. Aus der Zykeldarstellung liest man in allen Fällen das Vorzeichen 1 ab.

(b) Finden Sie ein Element $\varrho \in S_5$ mit $\varrho\sigma\varrho^{-1} = \tau$ oder argumentieren Sie, warum es ein solches ϱ nicht gibt. (3)

Lösung: Solch ein ϱ gibt es nicht. Denn sonst würde gelten, dass $\sigma^2 = e$, da $\tau^2 = e$.

A2. Die Ecken eines Tetraeders seien wie in der Abbildung nummeriert. Diese Nummerierung führt zu einem injektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{T} \to S_4$, wobei $\mathbb{T}$ die Tetraedergruppe bezeichne, also die Gruppe der Drehsymmetrien eines Tetraeders.



(a) Ist σ ein Element von $\varphi(\mathbb{T})$? Wenn ja, beschreiben Sie dieses Element geometrisch.

(i) $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$. (2)

Lösung: Nein, denn $\mathbb{T}$ enthält kein Element der Ordnung 4.

(ii) $\sigma = (1\ 3)(2\ 4)$. (2)

Lösung: Ja, dies entspricht der Rotation um 180° um die Achse die durch die Mittelpunkte der Kanten 1,3 und 2,4 geht.

(b) Bestimmen Sie ein Element der Ordnung 3 in $\varphi(\mathbb{T})$. (Sie müssen nicht argumentieren, warum das von Ihnen gewählte Element in $\varphi(\mathbb{T})$ liegt.) (2)

Lösung: Ein solches ist $(1\ 2\ 4)$.

A3. (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es die Seiten eines Tetraeders mit drei Farben zu färben? (3)

Lösung: Man berechnet wie üblich die Anzahl der Färbungen, die durch die einzelnen Elemente der Tetraedergruppe festgehalten werden. Es sind dies für die Identität 3^4, für die acht Drehungen um 120° 3^2, für die drei Drehungen um 180° 3^2. Somit gibt es $(3^4 + 8 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^2)/12 = 15$ Färbungen.

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es die Seiten eines Tetraeders mit drei Farben zu färben, wenn auch Färbungen identifiziert werden, die durch Spiegelungen ineinander überführt werden können? (D.h.: Wie viele Färbungen gibt es bezüglich der vollen Tetraedergruppe, die auch die Spiegelungen enthält?) (3)

Lösung: Im Vergleich zur vorigen Teilaufgabe erhält man zusätzlich sechs Spiegelungen, die zwei Ecken, die durch eine Kante verbunden sind vertauschen und sechs Spiegelungen die durch hintereinanderausführen einer Rotation um 120° und einer solchen Spiegelung entstehen (mit anderen Worten, die sechs möglichen Transpositionen der Form $(a\,b)$ und die sechs möglichen Permutationen der Form $(a\,b\,c\,d)$).

Für diese erhält man jeweils 3^3 bzw. 3 mögliche Färbungen. Insgesamt gibt es also $(180 + 6 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3)/24 = 15$ Färbungen. (Es gibt also keine Färbungen, die vorher unterschiedlich waren und durch eine Spiegelung gleich werden. Hätte man vier Farben zu Verfügung, wäre dies anders.)

A4. Ist in den folgenden Fällen $f \in K[x]$ irreduzibel? Sollte dies nicht der Fall sein, untersuchen Sie in wie viele irreduzible Faktoren f zerfällt.

(a) $K = \mathbb{Q}$, $f = x^3 + x + 1$. (3)

Lösung: Es ist f irreduzibel, da es über $\mathbb{Z}$ irreduzibel ist (Lemma von Gauß), da für eine Nullstelle gelten würde $x(x^2 + 1) = -1$.

(b) $K = \mathbb{F}_{p^n}$, $f = x^{p^n} - x$, wobei p eine Primzahl ist. (3)

Lösung: Es ist f nicht irreduzibel; f zerfällt über K in Linearfaktoren.

(c) $K = \mathbb{F}_3$, $f = x^9 + x^3 + 1$. (3)

Lösung: Es ist f nicht irreduzibel, da f eine Nullstelle bei 1 besitzt. Es ist $f = (x^3 + x + 1)^3 = (x - 1)^3(x^2 + x - 1)^3$, und somit zerfällt f in 6 Faktoren.

A5. Bestimmen Sie in den folgende Fällen für $\alpha \in L$ das Minimalpolynom über K.

(a) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{R}$, $\alpha = 1 + \sqrt{3}$. (2)

Lösung: Es ist $\alpha^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 2\sqrt{3} + 4$. Somit gilt $\alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0$ und α ist Nullstelle von $x^2 - 2x - 2$. Dieses Polynom ist irreduzibel, wie man mit dem Eisensteinkriterium für $p = 2$ nachrechnet, und somit das Minimalpolynom von α.

(b) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$, $\alpha = \frac{i+1}{\sqrt{2}}$. (2)

Lösung: Es ist $\alpha^2 = i$, $\alpha^3 = \frac{2i-2}{2\sqrt{2}} = \frac{i-1}{\sqrt{2}}$, $\alpha^4 = -1$. Somit ist $\alpha^4 = -1$ und α Nullstelle von $x^4 + 1$. Dieses Polynom ist irreduzibel, denn es hat keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$, denn $x^4 + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{Q}$; würde das Polynom in zwei quadratische Polynome zerfallen, dann wäre einer der Faktoren das Minimalpolynom von α, d.h., $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ für $a, b \in \mathbb{Q}$. Dann wäre also $(i + b)\sqrt{2} + a(i + 1) = 0$, was nicht sein kann.

(c) $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$, $\alpha = \pi i$. (2)

Lösung: Es ist $\alpha^2 = -\pi^2$ und somit ist $x^2 + \pi^2$ das Minimalpolynom von α, da es keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ hat.

A6. Sei $f = x^3 - x - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ irreduzibel. Sei $\alpha \in \mathbb{F}_{27}$ eine Nullstelle von f. Es ist also $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{F}_3[\alpha]$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α^2, α^9 und α^{27} über $\mathbb{F}_3$. (3)

Lösung: Sei $\beta := \alpha^2$. Dann ist $\beta^2 = \alpha^2 + \alpha$, $\beta^3 = \alpha^2 - \alpha + 1$. Somit ist $\beta^3 + \beta^2 + \beta - 1 = 0$ und das Minimalpolynom $x^3 + x^2 + x - 1$, da dieses Polynom keine Nullstellen in $\mathbb{F}_3$ hat und somit irreduzibel ist.

Für das Minimalpolynom $g(x)$ von α^9 gilt, dass $g(\alpha^9) = g(\alpha)^9 = 0$ und somit $g = f$. Genauso ist f das Minimalpolynom von α^{27}.

(b) Ist α ein Erzeuger von $\mathbb{F}_{27}^\times$? (3)

Lösung: Es ist $\alpha^{13} = 1$. Somit ist α kein Erzeuger.

(c) Sei β ein Erzeuger von $\mathbb{F}_{27}^\times$. Bestimmen Sie β^{13}. (3)

Lösung: Es muss gelten, dass $\beta^{26} = 1$, also $(\beta^{13})^2 = 1$, d.h. β^{13} ist Nullstelle von $x^2 - 1$ und somit $\beta^{13} = -1$.

A7. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (Beantworten Sie die Fragen ohne Begründung; Die Lösung jeder Teilaufgabe soll also nur aus dem Wort *wahr* oder dem Wort *falsch* bestehen. Für jede richtige Lösung erhalten Sie 2 Punkte, für jede falsche Lösung werden Ihnen 2 Punkte abgezogen. Insgesamt können Sie jedoch nicht weniger als 0 Punkte erhalten.)

(a) Sei R ein euklidischer Ring und $a, b, c \in R \setminus \{0\}$. Dann gilt (±2)

$$a \cdot \mathrm{ggT}(b, c) = \mathrm{ggT}(ab, ac).$$

Lösung: Wahr.

(b) Sei G eine abelsche Gruppe. Dann besteht jede Konjugationsklasse von G aus genau einem Element. (±2)

Lösung: Wahr.

(c) Sei G eine Gruppe. Besteht jede Konjugationsklasse von G aus genau einem Element, dann ist G abelsch. (±2)

Lösung: Wahr. Sei $a, b \in G$. Nach Annahme ist $aba^{-1} = b$. Somit ist $ba = aba^{-1}a = ab$ und also G abelsch.

(d) Sei $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Ist das Ideal $(a, b, c) = \mathbb{Z}$, dann sind a, b, c paarweise teilerfremd. (±2)

Lösung: Falsch. Für $a = 1, b = 2, c = 2$ sind b, c nicht teilerfremd, aber $(a, b, c) = \mathbb{Z}$.