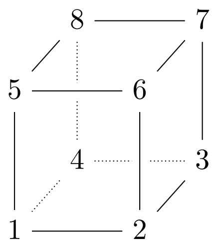
Universität Ulm

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Elemente der Algebra: Probeklausur

A1. Die Eckpunkte eines Würfels seien wie in der Abbildung nummeriert. Diese Nummerierung



führt zu einem injektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{W} \to S_8$.

(a) Ist die Permutation $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$ ein Element von $\varphi(\mathbb{W})$? (2)

(b) Bestimmen Sie ein Element der Ordnung 4 in $\varphi(\mathbb{W})$. (Sie müssen nicht argumentieren, warum das von Ihnen gewählte Element in $\varphi(\mathbb{W})$ liegt.) (2)

(c) Bestimmen Sie ein Element der Ordnung 3 in $\varphi(\mathbb{W})$. (Sie müssen nicht argumentieren, warum das von Ihnen gewählte Element in $\varphi(\mathbb{W})$ liegt.) (2)

(d) Beschreiben Sie geometrisch, wie die Elemente der Ordnung 4 in $\mathbb{W}$ aussehen. Wie viele Elemente der Ordnung 4 besitzt $\mathbb{W}$ demnach? (2)

A2. Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(a) Seien $\sigma, \tau \in G$ konjugiert. Dann gilt $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{ord}(\tau)$. (3)

(b) Seien $\sigma, \tau \in G$. Dann gilt (3)

$$\mathrm{ord}(\sigma\tau) = \mathrm{kgV}(\mathrm{ord}\,(\sigma), \mathrm{ord}(\tau))\,.$$

A3. Auf wie viele Arten kann man die Seiten eines Tetraeders mit den Farben Grün und Rot färben? (6)

A4. Bestimmen Sie im euklidischen Ring R den größten gemeinsamen Teiler der Elemente a und b. Finden Sie außerdem Elemente $s, t \in R$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = sa + tb$.

(a) $R = \mathbb{Z}$, $a = 91$, $b = 14$ (3)

(b) $R = \mathbb{F}_2[x]$, $a = x^3 + x^2 + x + 1$, $b = x^2 + x$ (3)

A5. Sei R ein Ring. Sei (6)

$$I := \{a \in R : \text{ es existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass I ein Ideal von R ist.

A6. Sei $f = x^3 + x^2 + x - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ irreduzibel. Sei $\alpha \in \mathbb{F}_{27}$ eine Nullstelle von f. Es ist also $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{F}_3[\alpha]$.

(a) Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom von α^2, α^9 und α^{27} über $\mathbb{F}_3$. (4)

(b) Gibt es ein Element $\beta \in \mathbb{F}_3[\alpha]$ mit $\mathbb{F}_3[\beta] = \mathbb{F}_9$? Falls ja, bestimmen Sie ein solches Element. (3)

(c) Ist α ein Erzeuger von $(\mathbb{F}_3[\alpha])^\times$? (3)

A7. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (Beantworten Sie die Fragen ohne Begründung. Die Lösung jeder Teilaufgabe soll also nur aus dem Wort *wahr* oder dem Wort *falsch* bestehen. Für jede richtige Lösung erhalten Sie 2 Punkte, für jede falsche Lösung werden Ihnen 2 Punkte abgezogen. Insgesamt können Sie jedoch nicht weniger als 0 Punkte erhalten.)

(a) Sei G eine endliche Gruppe mit n Elementen und $\sigma \in G$. Dann gilt $\mathrm{ord}(\sigma)|n$. (±2)

(b) Sei G eine endliche zyklische Gruppe. Dann ist G abelsch. (±2)

(c) Sei R ein euklidischer Ring, $a \in R$. Für alle $b \in R$ gelte $a|b$. Dann ist $a \in \{-1, 1\}$. (±2)

(d) Sei $K = \mathbb{F}_{p^n}$ ein endlicher Körper. Gibt es in K ein $\alpha \neq 0$ mit $\alpha + \alpha = 0$, dann ist $p = 2$. (±2)

Es können bei der Klausur insgesamt 50 Punkte erreicht werden. Erreichen Sie 20 oder mehr Punkte, haben Sie die Klausur bestanden. Es sind, neben Schreibzeug und Würfeln, keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Viel Erfolg!