Universität Ulm
Irene Bouw
Michaela Eskin-Hämmerle

WS13/14
Grundlagen der Mathematik
Blatt 10

Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Welche der folgenden Folgen ist eine Cauchy-Folge? Begründe deine Antwort mit Hilfe der Definition von Cauchy-Folgen oder einem Satz aus der Vorlesung. Gib bei Cauchy Folgen für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ (in Anhängigkeit von ε) an, sodass $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und $p \in \mathbb{N}$.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((\frac{1}{3})^n)_{n\in\mathbb{N}}$	(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$
(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (10 - 10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$	(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$
(e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$	(f) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{n-1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n = z^n$ für ein $z \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, falls $|z| < 1$ oder $z = 1$ und bestimme für jedes z den Grenzwert.

Aufgabe 3 (1 + 1 + 1 + 1 + 1,5 + 1 + 1 + 1,5 + 1 + 1 = 11 Punkte)

Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ folgendermaßen: $a_0 = 1$ und $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Berechne a_n für $n = 0, \ldots, 4$.

(b) Sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Fibonacci-Folge (siehe Blatt 4, Aufgabe 5). Zeige mit vollständiger Induktion, dass $a_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Zeige durch Induktion, dass $F_n^2 + F_nF_{n+1} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) Folgere aus (b) und (c), dass $|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}$.

(e) Zeige mit Hilfe der zweiten Form der Induktion, dass $F_n \geq n$ für alle $n \geq 5$.

(f) Zeige, dass
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

(g) Sei $n \geq 5$ und $p \in \mathbb{N}$. Zeige mit Hilfe von (d), (e), (f) und der Dreiecksungleichung, dass
$$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a_{n+p-1}) + \cdots + a_{n+1} - a_n| \leq \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{(n+j)(n+j+1)}$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

(h) Benutze (g) um zu zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

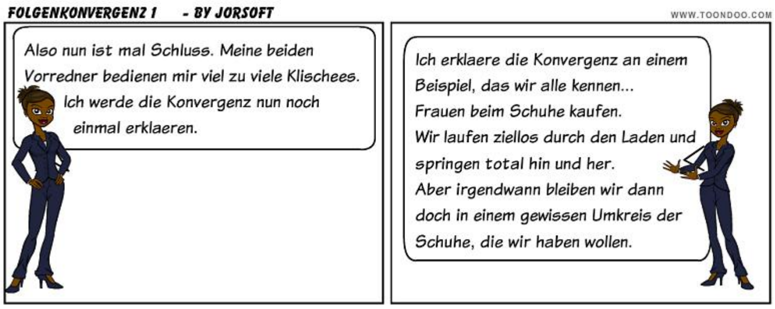
Cauchy ist närrisch und es gibt keinen Weg, mit ihm zurechtzukommen, obgleich er gegenwärtig der Mathematiker ist, der am besten weiß, wie Mathematik gemacht werden sollte.
Niels Abel (1802 - 1829)

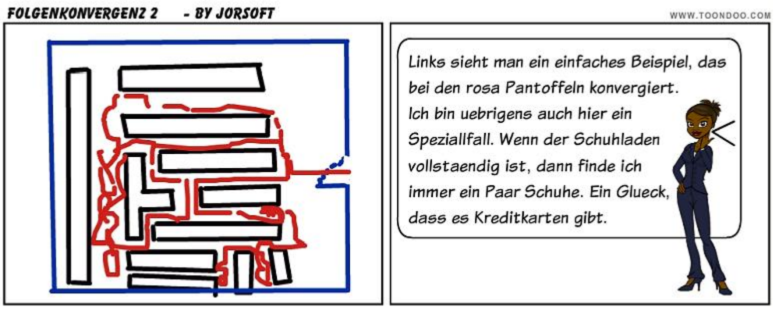
(i) Wir wissen jetzt, dass die Folge konvergiert. Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Zeige, dass $a = 1 + \frac{1}{a}$.
Tipp: Du darfst benutzen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$

(j) Benutze Aufgabe 5a von Blatt 4 um zu zeigen, dass $a = (1+\sqrt{5})/2$ ist. (Dies ist der goldenen Schnitt.)

Tipp: Du darfst die Aussagen der einzelnen Teilaufgaben für den Rest der Aufgabe benutzen, auch wenn du die Teilaufgaben nicht lösen konntest.





[1]

[1]Ein Raum heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.