



Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Welche der folgenden Folgen ist eine Cauchy-Folge? Begründe deine Antwort mit Hilfe der Definition von Cauchy-Folgen oder einem Satz aus der Vorlesung. Gib bei Cauchy Folgen für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ (in Abhängigkeit von ε) an, sodass $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und $p \in \mathbb{N}$.

- (a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\frac{1}{3})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$
(c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (10 - 10^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ (d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$
(e) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ (f) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{n-1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n = z^n$ für ein $z \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, falls $|z| < 1$ oder $z = 1$ und bestimme für jedes z den Grenzwert.

Aufgabe 3 (1 + 1 + 1 + 1 + 1,5 + 1 + 1 + 1,5 + 1 + 1 = 11 Punkte)

Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ folgendermaßen: $a_0 = 1$ und $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$ für $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Berechne a_n für $n = 0, \dots, 4$.
(b) Sei $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Fibonacci-Folge (siehe Blatt 4, Aufgabe 5). Zeige mit vollständiger Induktion, dass $a_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
(c) Zeige durch Induktion, dass $F_n^2 + F_n F_{n+1} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
(d) Folgere aus (b) und (c), dass $|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{F_{n+1} F_{n+2}}$.
(e) Zeige mit Hilfe der zweiten Form der Induktion, dass $F_n \geq n$ für alle $n \geq 5$.
(f) Zeige, dass

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

- (g) Sei $n \geq 5$ und $p \in \mathbb{N}$. Zeige mit Hilfe von (d), (e), (f) und der Dreiecksungleichung, dass

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= |(a_{n+p} - a_{n+p-1}) + \dots + a_{n+1} - a_n| \leq \sum_{j=1}^p \frac{1}{(n+j)(n+j+1)} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \leq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

- (h) Benutze (g) um zu zeigen, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Cauchy ist närrisch und es gibt keinen Weg, mit ihm zurechtzukommen, obgleich er gegenwärtig der Mathematiker ist, der am besten weiß, wie Mathematik gemacht werden sollte.



- (i) Wir wissen jetzt, dass die Folge konvergiert. Sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Zeige, dass $a = 1 + \frac{1}{a}$.
Tipp: Du darfst benutzen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}.$$

- (j) Benutze Aufgabe 5a von Blatt 4 um zu zeigen, dass $a = (1 + \sqrt{5})/2$ ist. (Dies ist der goldenen Schnitt.)

Tipp: Du darfst die Aussagen der einzelnen Teilaufgaben für den Rest der Aufgabe benutzen, auch wenn du die Teilaufgaben nicht lösen konntest.

FOLGENKONVERGENZ 1 - BY JORSOFT WWW.TOONDOO.COM

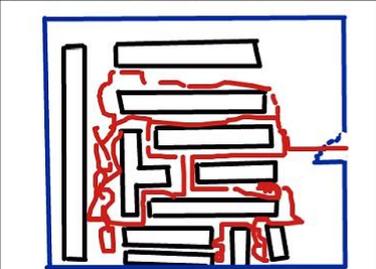
Also nun ist mal Schluss. Meine beiden Vorredner bedienen mir viel zu viele Klischees. Ich werde die Konvergenz nun noch einmal erklären.



Ich erkläre die Konvergenz an einem Beispiel, das wir alle kennen...
Frauen beim Schuhe kaufen.
Wir laufen ziellos durch den Laden und springen total hin und her.
Aber irgendwann bleiben wir dann doch in einem gewissen Umkreis der Schuhe, die wir haben wollen.



FOLGENKONVERGENZ 2 - BY JORSOFT WWW.TOONDOO.COM



Links sieht man ein einfaches Beispiel, das bei den rosa Pantoffeln konvergiert. Ich bin uebrigens auch hier ein Spezialfall. Wenn der Schuhladen vollstaendig ist, dann finde ich immer ein Paar Schuhe. Ein Glueck, dass es Kreditkarten gibt.



¹Ein Raum heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

Cauchy ist närrisch und es gibt keinen Weg, mit ihm zurechtzukommen, obgleich er gegenwärtig der Mathematiker ist, der am besten weiß, wie Mathematik gemacht werden sollte.