Universität Ulm
Irene Bouw
Michaela Eskin-Hämmerle

WS13/14
Grundlagen der Mathematik
Blatt 11

Aufgabe 1 ($3 \cdot 4 \cdot 0,5 = 6$ Punkte)

Eine Folge (a_n) heißt *monoton*, falls sie monoton fallend (d.h. $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$) oder monoton wachsend (d.h. $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$) ist. Welche der Folgenden Folgen ist

i) monoton? ii) nach unten beschränkt? iii) nach oben beschränkt?

a) $a_n = \frac{n^2-n+1}{n+1}$ b) $b_n = \frac{n^2-n+1}{n(n+1)}$ c) $c_n = \frac{1}{1+(-2)^n}$ d) $d_n = \sqrt{1+\frac{n+1}{n}}$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Welche sind falsch? Begründe deine Antwort. Auf Blatt 9 haben wir bewiesen, dass jede nach unten beschränkte, monoton fallende Folge konvergiert. Analog kann man zeigen, dass jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge konvergiert. Dies darfst du bei dieser Aufgabe benutzen.

a) Jede konvergente rationale Folge besitzt einen Grenzwert in $\mathbb{Q}$.

b) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

c) Jede konvergente Folge ist monoton.

d) Jede monotone Folge ist beschränkt.

e) Ist eine Folge monoton und beschränkt, dann ist sie eine Cauchy-Folge.

f) Jede beschränkte Folge ist eine Cauchy-Folge.

Aufgabe 3 (0,5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,5 + 1= 8 Punkte)

Wir definieren eine Folge $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass 1 eine untere Schranke ist.

(b) Zeige, dass $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Zeige, dass $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$ für $1 \leq k \leq n$.

(d) Zeige, dass $k! \geq 2^{k-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(e) Zeige, dass $a_n \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(f) Zeige, dass a_n nach oben beschränkt ist.

(g) Zeige, dass a_n monoton wachsend ist.

(h) Folgere, dass a_n konvergent ist.

Hinweis: Die Ergebnisse vorhergehender Teilaufgaben durfen benutzt werden. Außerdem durfen Ergebnisse alter Übungsaufgaben benutzt werden. Beispielsweise kann Aufgabe 1c von Blatt 5 und Aufgabe 2 von Blatt 10 nützlich sein.

If a nonnegative quantity was so small that it is smaller than any given one, then it certainly could not be anything but zero. To those who ask what the infinitely small quantity in mathematics is, we answer that it is actually zero. Hence there are not so many mysteries hidden in this concept as they are usually believed to be.
Leonhard Euler (1707 - 1783)