Universität Ulm
Irene Bouw
Michaela Eskin-Hämmerle

WS 13/14
Grundlagen der Mathematik
Blatt 4

Aufgabe 1 (1,5 + 1,5 = 3 Punkte)

Beweise folgende Aussagen durch Kontraposition:

a) Wenn die letzte Ziffer einer natürlichen Zahl 2, 3, 7 oder 8 ist, dann ist die Zahl keine Quadratzahl.

b) Wenn von zwei ganzen Zahlen m und n eine nicht durch 3 teilbar ist, dann ist auch eine der Zahlen $m - n$ und $m + n$ nicht durch 3 teilbar.

Hinweis:
Zu a): Die letzte Stelle eines Produkts von zwei Zahlen ist die letzte Stelle des Produkts der letzen Stellen der beiden Zahlen.
Zu b): Wenn eine gerade Zahl durch 3 teilbar ist, so ist auch die Hälfte dieser Zahl durch 3 teilbar.

Aufgabe 2 (1 + 2 = 3 Punkte)

Beweise folgende Aussagen durch einen Widerspruchsbeweis:

a) Es gibt keine ganzen Zahlen m, n mit $28n + 42m = 100$.

b) In einer Gruppe, die aus $n \geq 2$ Personen besteht, gibt es mindestens 2 Personen, die innerhalb der Gruppe gleich viele Freunde haben.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien X und Y Mengen. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) $Y \subset X$

ii) $X \cup Y = X$

iii) $X \cap Y = Y$.

Aufgabe 4 (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

a) Eine Gruppe von 20 Weihnachtsmännern zieht durch die Stadt und verteilt Geschenke. Jeder Weihnachtsmann kann bis zu 18 Geschenke in seinen Schlitten packen.

Zeige: Zu jedem Zeitpunkt haben mindestens zwei Weihnachtsmänner die gleiche Anzahl Geschenke in ihren Schlitten.

b) Ein Fakir bestückt sein Brett (1,5m x 0,6m) wahllos mit 100 Nägeln.

Zeige, dass es immer zwei Nägel gibt, die höchstens 15 cm voneinander entfernt sind.

c) Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion und sei $|A| = |B| < \infty$. Zeige:

$$f \text{ ist injektiv } \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Ein Beweis, der nicht streng ist, ist nichts.
Henri Poincaré (1854 - 1912)

Universität Ulm
Irene Bouw
Michaela Eskin-Hämmerle

WS 13/14
Grundlagen der Mathematik
Blatt 4

Viel Spaß beim Beweisen! [1]

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und seien $c, a_m, \ldots, a_n, b_m, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Regeln sind richtig, welche falsch? Gib bei falschen Regeln ein Gegenbeispiel an.

(1) $\sum_{i=m}^n c = (n-m)c$ (2) $\sum_{i=m}^n (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=m}^n a_i$

(3) $\sum_{i=m}^n a_i^2 = (\sum_{i=m}^n a_i)^2$ (4) $\sum_{i=m}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i$

(5) $\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m}^n a_{n+m-i}$ (6) $\sum_{i=m}^n \frac{1}{a_i} = \frac{1}{\sum_{i=m}^n a_i}$, falls $a_i \neq 0$ für $i = m, \ldots, n$

Hinweis: Nützliche Informationen über Summen findet ihr im Anhang "A.3 Summen und Produkte" am Ende des Skripts.

[1] Die Riemannsche Vermutung (nach Bernhard Riemann) ist eine Annahme über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion. Ihre Bedeutung liegt darin, dass ihre Nullstellen im Komplexen Auskunft über Primzahlen, deren Verteilung und viele derer Eigenschaften geben. Ob die Vermutung zutrifft oder nicht, ist eines der bedeutendsten ungelösten Probleme der Mathematik.

Ein Beweis, der nicht streng ist, ist nichts.
Henri Poincaré (1854 - 1912)