Universität Ulm
Irene Bouw
Michaela Eskin-Hämmerle

WS 13/14
Grundlagen der Mathematik
Blatt 8

Aufgabe 1 (1,5 + 1,5 +2 + 2 = 7 Punkte)

Gegeben sei eine natürliche Zahl $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_{10} = \sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i$ mit $a_i \in \{0, \dots, 9\}$. Sei $Q(n) = \sum_{i=0}^k a_i$ und $Q'(n) = \sum_{i=0}^k (-1)^i a_i$. Beweise folgende Teilbarkeitsregeln.

a) $4 \mid n$, falls $4 \mid (a_1 a_0)_{10}$

b) $5 \mid n$, falls $a_0 \in \{0, 5\}$.

c) $9 \mid n$, falls $9 \mid Q(n)$.

d) $11 \mid n$, falls $11 \mid Q'(n)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Berechne

$$10^{1000} \pmod 4, \qquad 10^{1000} \pmod{16}.$$

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2+ 2 = 8 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq x_0 < \sqrt{a}$. Wie in der Vorlesung definieren wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

a) Zeige, dass $0 < x_1 - \frac{a}{x_1} < \frac{a}{x_0} - x_0$. (Tipp: betrachte den Quotienten $(x_1 - \frac{a}{x_1})/(\frac{a}{x_0} - x_0)$.)

b) Benutze a) um für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen, dass

$$x_{2n} < \frac{a}{x_{2n+1}} < x_{2n+2} < \frac{a}{x_{2n+2}} < x_{2n+1} < \frac{a}{x_{2n}}.$$

c) Wir definieren $d_n = |x_n - \frac{a}{x_n}|$. Zeigen Sie, dass

$$d_{n+1} < d_n^2.$$

d) Wir nehmen an, dass $d_n < 10^{-k}$ ist. Zeigen Sie, dass die erste k Nachkommastellen der Näherung x_n von $\sqrt{a}$ richtig sind. Zeigen Sie auch, dass mindestens $2k$ Nachkommastellen von x_{n+1} richtig sind.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Vom wievielten Folgenglied ab sind die Werte der Folge

$a)\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3 \cdot 4^n)_{n\in\mathbb{N}}$	(i) größer als 100?	(ii) größer als 10^6?
$b)\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$	(i) kleiner als $0,1$?	(ii) kleiner als 10^{-6}?