Universität Ulm
Irene Bouw
Michaela Eskin-Hämmerle

WS 13/14
Grundlagen der Mathematik
Blatt 9

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Konvergieren nachstehende Folgen? Wenn ja, gib den jeweiligen Grenzwert a an. Beweise deine Aussage mit Hilfe der Definition von Konvergenz!

a) $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *b)* $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *c)* $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

d) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *e)* $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *f)* $\left(\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 2 (1,5 Punkte)

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $ab > 0$. Zeige

$$a < b \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{b} < \frac{1}{a}. \tag{0.1}$$

(b) Gilt die Aussage (0.1) auch, wenn $ab < 0$ ist?

Aufgabe 3 ($2 + 2{,}5 = 4{,}5$ Punkte)

Zeige folgende Rechenregeln:
Summe und Produkt konvergenter Folgen. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen. Dann konvergieren auch die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) \\
\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n)
\end{aligned}$$

Alle Pädagogen sind sich darin einig: man muss vor allem tüchtig Mathematik treiben, weil ihre Kenntnis fürs Leben größten direkten Nutzen gewährt.
Felix Klein (1849 - 1925)

Universität Ulm
Irene Bouw
Michaela Eskin-Hämmerle

WS 13/14
Grundlagen der Mathematik
Blatt 9

Aufgabe 4 (2 + 2 = 4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

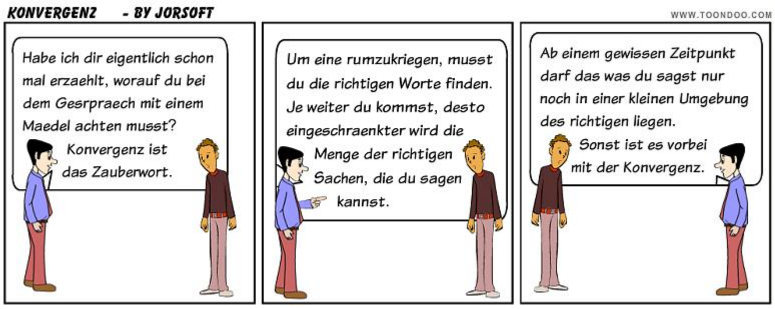
(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten beschränkt, d.h. $\exists b \in \mathbb{R} : b \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, d.h. $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

a) Sei a die größte untere Schranke von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. a ist die größte Zahl mit $a_n \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : a_N < a + \varepsilon$$

b) Benutze a) und Eigenschaft (ii) um zu zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die größte untere Schranke a konvergiert.



Alle Pädagogen sind sich darin einig: man muss vor allem tüchtig Mathematik treiben, weil ihre Kenntnis fürs Leben größten direkten Nutzen gewährt.
Felix Klein (1849 - 1925)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

1.) **Arithmetische Folgen**

In einem Sparstrumpf befinden sich $a_0 = 150$ Euro. Jeden Monat steckt die geizige Erbtante 5 Euro in den Strumpf, um das Geld vor den Erben in Sicherheit zu bringen.

Gesucht ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die angibt, wie viel Geld sich nach n Monaten im Strumpf befinden.

a) Gib die Folgenglieder a_1 bis a_5 an und vervollständige die Grafik. Beschrifte die Pfeile mit den durchgeführten Rechenoperationen:

a_0		a_1		a_2		a_3		a_4		a_5
150	$\longrightarrow$		$\longrightarrow$		$\longrightarrow$		$\longrightarrow$		$\longrightarrow$	

b) Finde mit Hilfe von a) eine rekursive[1] Darstellung der Folge, das heißt finde

(I) $a_1 =$

(II) $a_{n+1} =$

c) Finde mit Hilfe von a) und b) eine explizite[2] Darstellung der Folge: $a_n =$

d) **Eine arithmetische Folge wird also von einem Startwert a_0 und einer Differenz d zwischen einem Folgenglied und dem nächsten bestimmt. Gib für diesen allgemeinen Fall an:**

Rekursive Darstellung: (I) $a_1 =$

(II) $a_{n+1} =$

Explizite Darstellung: $a_n =$

[1] Man spricht von der rekursiven Darstellung einer Folge, wenn das $n+1$-te Folgenglied in Abhängigkeit der vorherigen Folgenglieder angegeben wird. Das erste Folgenglied muss dabei extra definiert werden, z.B. ist die rekursive Darstellung der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n!)_{n\in\mathbb{N}}$ folgende: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$.

[2] Eine Folge wird explizit dargestellt, wenn jedes Folgenglied für sich unabhängig von den anderen Folgengliedern definiert wird, z.B. ist $a_n = n!$ die explizite Darstellung der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n!)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.) **Geometrische Folgen**

Im Sparstrumpf der Tante befinden sich $a_0 = 200$ Euro. Die Tante hat diesen Sparstrumpf so gut versteckt, dass sie sich nicht mehr erinnern kann, wo er sich befindet[3]. Jeden Monat entwenden die gewieften Erben, welche genau über die Verstecke der Sparstrümpfe der Tante informiert sind, so viel Geld, dass noch 95% des Geldes zurückbleiben.

Gesucht ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die angibt, wie viel Geld sich nach n Monaten im Strumpf befinden.

a) Gib die Folgenglieder a_1 bis a_5 an und vervollständige die Grafik. Beschrifte die Pfeile mit den durchgeführten Rechenoperationen:

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
200 $\longrightarrow$	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	

b) Finde mit Hilfe von a) eine rekursive Darstellung der Folge, das heißt finde

(I) $\quad a_1 =$

(II) $\quad a_{n+1} =$

c) Finde mit Hilfe von a) und b) eine explizite Darstellung der Folge: $a_n =$

d) **Eine geometrische Folge wird also von einem Startwert a_0 und einem Quotienten q zwischen einem Folgenglied und dem nächsten bestimmt. Gib für diesen allgemeinen Fall an:**

Rekursive Darstellung: (I) $\quad a_1 =$

(II) $\quad a_{n+1} =$

Explizite Darstellung: $\quad a_n =$

[3] Das heißt sie kann nichts mehr einzahlen.