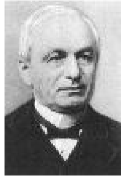

Universität Ulm
Irene Bouw
Michaela Eskin-Hämmerle

WS 13/14
Grundlagen der Mathematik
Blatt 3

Aufgabe 1 (1 + 2 = 3 Punkte)

Beweise folgende Aussagen direkt:

a) Wenn eine natürliche Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist ihr Quadrat durch 8 teilbar.

b) $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$.

Aufgabe 2 (2 + 1 + 1 + 2 = 6 Punkte)

Wir definieren

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ |x + y| \leq |x| + |y|$. (Dreiecksungleichung)

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ |x - y| \leq |x| - |y|$.

c) $\exists x, y \in \mathbb{R}\ |x - y| \leq |x| - |y|$.

d) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ |\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$.

(**Hinweis:** Bei zwei Teilaufgaben ist eine Fallunterscheidung hilfreich.)

Aufgabe 3 (2,5 Punkte)

Seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ bijektive Abbildungen. Zeige, dass $g \circ f : A \longrightarrow C$ auch bijektiv ist und bestimme die Umkehrfunktion von $g \circ f$ in Anhängigkeit von f^{-1} und g^{-1}.

Aufgabe 4 (1 + 1,5 + 2 + 2 + 2 = 8,5 Punkte)

Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion. Beweise für $X_1, X_2 \subset A$ und $Y_1, Y_2 \subset B$ folgende Aussagen:

a) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$

b) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$, falls f injektiv ist.

c) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

d) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

e) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

Nos mathematici sumus isti veri poetae sed quod fingimus nos et probare decet.
(Wir Mathematiker sind die wahren Dichter,
nur müssen wir das, was unsere Phantasie schafft, noch beweisen.)
Leopold Kronecker (1823 - 1891)