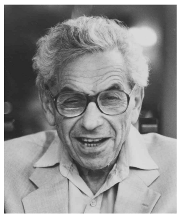


Aufgabe 1 (1 + 1,5 + 1,5 + 1 = 5 Punkte)

Beweise folgende Aussagen durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ für alle $q \in \mathbb{R}$ (geometrische Summe)

d) $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n-1})$.

Aufgabe 2 (1 + 1,5 = 2,5 Punkte)

Beweise folgende Aussagen durch vollständige Induktion.

a) $n! > 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

b) $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$.

Aufgabe 3 (2 + 3 + 2 = 7 Punkte)

Beweise folgende Aussagen durch vollständige Induktion.

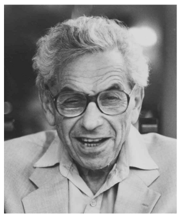
a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Man kann eine Ebene durch n Geraden in höchstens $\frac{n^2+n+2}{2}$ Gebiete zerlegen.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Eine n-elementige Menge besitzt 2^n Teilmengen.

c) Die Summe der Innenwinkel in einem konvexen[1] n-Eck ist $(n-2) \cdot 180°$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Du darfst voraussetzen, dass die Winkelsumme im Dreieck $180°$ ist.

[1] Ein n-Eck ist konvex, falls alle Verbindungsstrecken zwischen zwei Punkten des n-Ecks innerhalb des n-Ecks liegen. Ein Quadrat ist zum Beispiel ein konvexes 4-Eck. Ein Mercedes-Stern hingegen ist nicht konvex.

Ein Mathematiker ist eine Maschine, die Kaffee in Theoreme verwandelt.
PAUL ERDÖS (1913 - 1996)



Aufgabe 4 (0,5 + 3 = 3,5 Punkte)

Hintergrundgeschichte
Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, hat in seinem Buch *Liber Abbacci* aus dem Jahre 1202 folgendes Modell zur Vermehrung einer Kaninchenpopulation beschrieben:
Wir beginnen mit einem noch nicht geschlechtsreifen Kaninchenpaar (einem Männchen und einem Weibchen). Wir gehen davon aus, dass ein Kaninchenpaar nach einem Monat geschlechtsreif wird, nach zwei Monaten das erste mal ein neues Kaninchenpaar in die Welt setzt und dann jeden Monat wieder eines. Wir bezeichnen mit F_n die Anzahl der Kaninchenpaare am Anfang des n-ten Monats. Am Anfang des 0. Monats haben wir noch keine Kaninchen, d.h. $F_0 = 0$. Am Anfang des 1. Monats haben wir das erste Kaninchenpaar, d.h. $F_1 = 1$. Am Anfage des 2. Monats haben wir immer noch nur ein Kaninchenpaar, da die Kaninchen erst nach 2 Monaten das erste mal werfen, also ist $F_2 = 1$. Am Anfang des 3. Monats hat das Kaninchenpaar dann ein zweites Kaninchenpaar zur Welt gebracht. Wir haben nun also $F_3 = 2$ Kaninchenpaare. Nun setzen jeden Monat alle Kaninchenpaare, die schon vor zwei Monaten auf der Welt waren, jeweils ein neues Kaninchenpaar in die Welt. Die Anzahl der Kaninchenpaare ist dann $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Dies führt uns zu der Zahlenfolge $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$. Diese Zahlenfolge, bei der jede Zahl, bis auf die erste beiden, die Summe der beiden vorangegangenen ist, heißt *Fibonacci-Folge*.

Wir wollen nun zeigen, dass man die Fibonacci-Zahlen auch mit Hilfe des *goldenen Schnitts* $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ beschreiben kann, der wie die Fibonacci-Zahlen selbst auch sehr häufig in der Natur vorkommt.

Aufgabe
Sei $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ und $F_n := F_{n-2} + F_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und sei $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\beta := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

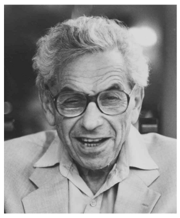
a) Zeige: $\alpha^2 = \alpha + 1$ und $\beta^2 = \beta + 1$.

b) Zeige durch vollständige Induktion, dass $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Hinweis: Verwende die zweite Form der vollständigen Induktion.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

„Wählt man aus der Menge der Menschen irgendeine Gruppe von n Personen aus, so haben diese alle die gleiche Blutgruppe!“
Der „Beweis“ wird durch Induktion nach n geführt. Im Falle $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Nun sei die Aussage für n wahr. Für $n + 1$ folgt sie dann so: Wählt man $n + 1$ Personen $x_1, \ldots, x_{n+1}$ aus, so haben nach Induktionsvoraussetzung $x_1, x_2 \ldots, x_n$ die gleiche Blutgruppe, aber auch $x_2, x_3 \ldots, x_n, x_{n+1}$, und damit hat x_{n+1} die gleiche Blutgruppe wie x_n und somit $x_1, \ldots, x_n$.
Wo steckt der Fehler?

Ein Mathematiker ist eine Maschine, die Kaffee in Theoreme verwandelt.
PAUL ERDÖS (1913 - 1996)

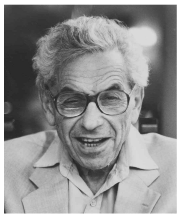


freiwillige Zusatzaufgabe

Trink eine Tasse Kaffee und lies die folgenden „Beweismethoden" durch. Kommen sie dir bekannt vor? Wie können wir solche „Beweismethoden" später in unserem Unterricht vermeiden?

- **Wischtechnik-Methode** Man wischt die entscheidenden Stellen des Beweises sofort nach dem Anschreiben wieder weg (rechts schreiben, links wischen).
- **Methode der exakten Bezeichnungen** Sei P ein Punkt Q, wir wollen ihn R nennen.
- **Autoritätsgläubige Methode** Das muss stimmen. Das steht so im Fischer.
- **Erkenntnisphilosophische Methode, Philos. Sem. A** Ich habe das Problem erkannt!
- **Erkenntnisphilosophische Methode, Philos. Sem. B** Ich glaube, ich habe das Problem erkannt!
- **Pazifistische Methode** Also, ehe wir uns darüber jetzt streiten, glaub ich das einfach!
- **Kommunikative Methode** Weiß das vielleicht jemand von ihnen?
- **Kapitalistische Methode** Eine Gewinnmaximierung tritt ein, wenn wir gar nichts beweisen, dann verbrauchen wir nämlich am wenigsten Kreide.
- **Kommunistische Methode** Das beweisen wir jetzt gemeinsam. Jeder schreibt eine Zeile, und das Ergebnis ist Staatseigentum.
- **3-W-Methode** Wer will's wissen?
- **Numerische Methode** Grob gerundet stimmts.
- **Beweis durch Ringschluß** Wir zeigen jetzt den Satz, dann beweisen wir die Voraussetzungen, und daraus folgt alles andere sofort.
- **Zeitlose Methode** Man beweise so lange herum, bis niemand mehr weiß, ob der Beweis nun schon zu Ende ist oder nicht.
- **Beweis durch Beispiel** Der Autor behandelt nur den Fall $n = 2$ und unterstellt dann, dass die Vorgehensweise für den allgemeinen Fall klar ist.
- **Beweis durch Einschüchterung** Das ist doch wohl trivial!
- **Beweis durch überladene Notation** Am besten, man verwendet mindestens vier Alphabete und viele Sonderzeichen. Hier reicht das griechische Alphabet alleine nicht mehr aus, um engagierte Zuhörer abzuschrecken. Ein kurzer Exkurs in die hebräischen Sonderzeichen sollte aber auch den stärksten Zweifler zum Schweigen bringen.
- **Methode der vollständigen Überdeckung** Man schreibt den Beweis an die Tafel und stellt sich davor.

Ein Mathematiker ist eine Maschine, die Kaffee in Theoreme verwandelt.
PAUL ERDÖS (1913 - 1996)



- **Methode des systematischen Auslassens**
  1. Die Details bleiben als leichte Übungsaufgabe dem geneigten Leser überlassen.
  2. Die anderen 253 Fälle folgen völlig analog hierzu.
  3. ...
  4. Den genaueren Beweisablauf behandeln wir in der Übung.
- **Beweis durch Verwirrung** Eine lange, zusammenhanglose Folge von wahren und/oder bedeutungslosen, syntaktisch verwandten Aussagen wird verwendet. Während der engagierte Leser noch versucht, den roten Faden zu finden, wird er durch parallele Anwendung der „überladenen Notation“ verwirrt.
- **Beweis durch nicht verfügbare Literatur** Der Autor zitiert ein einfaches Korollar eines Theorems, welches problemlos nachgelesen werden kann und zwar in einem Mitteilungsblatt der slowenischen philologischen Gesellschaft, 1883. Diese Beweisführung ist völlig erschöpfend und wird seit Jahrzehnten mit Vorliebe bei schriftlichen Ausarbeitungen (siehe Literaturangaben in beliebigen Dissertationen und Habilitationen) angewandt.
- **Beweis durch rekursiven Querverweis** In Quelle a wird Satz 5 gefolgert aus Satz 3 der Quelle b, welcher seinerseits sofort aus Korollar 6.2 der Quelle c folgt, das man trivial aus Satz 5 der Quelle a erhält.
- **Beweis durch Scheinverweis** Nichts dem zitierten Satz auch nur entfernt Ähnliches erscheint in der angegebenen Quelle.
- **Beweis durch konfuse Lehrkörper** Der Professor sagt A, schreibt B, meint dabei C, rechnet weiter mit D, bekommt E heraus, aber F wäre richtig gewesen.
- **Vollständige Reproduktion** Wenn Dein Nachbar eine Lösung anbietet, die wahrscheinlich richtig ist, kannst Du die einfach abschreiben und hast auch eine richtige Lösung.
- **Graphische Indifferenz** Ein schlunziges i ist schon ein knappes j.
- **Niveautheoretische Methode** Wir reden den Satz solange blöd an, bis er sich freiwillig beweisen läss t.
- **Beweis durch Abstimmung** Wer von Ihnen ist dafür?