



Diese Blatt bildet den Abschluss des Themas Beweismethoden. Überlege bei jeder Aufgabe, welche der Beweistechniken, die dir in der Vorlesung und Übung begegnet sind, am geeignetsten ist.

Aufgabe 1 ($1 + 1 + 2 + 3 = 7$ Punkte)

Beweise folgende Aussagen:

- a) $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- b) $\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- c) $\sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} r \binom{n}{r} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.
- d) $\sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} = 2^{n-1} n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 ($2 + 2 = 4$ Punkte)

Zeige oder widerlege folgende Aussagen.

- a) $\binom{n-1}{r-1} \binom{n}{r+1} \binom{n+1}{r} = \binom{n-1}{r} \binom{n}{r-1} \binom{n+1}{r+1}$ für alle $n, r \in \mathbb{N}$ mit $n > r \geq 1$.
- b) $\binom{n}{r} \binom{n+1}{r+1} = \binom{n-1}{r-1} \binom{n+2}{r+2}$ für alle $n, r \in \mathbb{N}$ mit $n > r \geq 1$.

Aufgabe 3 ($3 + 2 + 2 = 7$ Punkte)

- a) Zeige, dass

$$\begin{aligned} \max\{x, y\} &= \frac{1}{2} \cdot (x + y + |x - y|) \quad \text{und} \\ \min\{x, y\} &= \frac{1}{2} \cdot (x + y - |x - y|) \end{aligned}$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Dabei bezeichnet $\max\{x, y\}$ die größere der beiden Zahlen x, y und $\min\{x, y\}$ die kleinere der beiden Zahlen x, y . Im Fall $x = y$ gilt $\max\{x, y\} = \min\{x, y\} = x = y$.

- b) Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$: Ist $n^3 + 5$ ungerade, so ist n gerade.
- c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $ab \geq 0$ und $a + b \geq 0$. Zeige, dass $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Rette die Mathematik durch Sorgfalt!

Hans Wurst stellt folgende Behauptung auf: "Die Mathematik ist widersprüchlich, denn $4 \leq 2$."

Dies beweist er folgendermaßen:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x - 2 \geq y - 1$. Dann gilt $x - y \geq 1$ und somit $(x - y)^2 \geq 1$. Setz man $x = 3$, so erhält man $(y - 3)^2 = (3 - y)^2 \geq 1$. Also muss auch $y - 3 \geq 1$ gelten. Daraus folgt dann $y \geq 4$. Andererseits folgt aus $x - y \geq 1$ auch $y \leq x - 1$. Setzen wir $x = 3$, so gilt also $y \leq 2$. Insgesamt gilt also $4 \leq y \leq 2$.

Wir wissen zum Glück, dass die Mathematik nicht widersprüchlich ist. Also muss Hans Wurst in seinem Beweis einen Fehler gemacht haben. Finde diesen Fehler.



Bonusaufgabe (2 Punkte)

Die Brücke

Vier Mathematiker standen des Nachts vor einer langen, schmalen Brücke, die sie überqueren mussten, um ihren zahlreichen Verfolgern zu entkommen, welche ihnen dicht auf den Fersen lagen. „Sie mögen noch gut 17 Minuten zu uns brauchen“, sagte der Elb. „So lasst uns eilen, bevor sie uns erreicht haben!“ Der dicke, nachtblinde Zwerg sah sich die Brücke an und meinte kopfschüttelnd: „Da haben wir aber ein Problem. Diese Brücke trägt maximal zwei von uns gleichzeitig, und wir haben nur eine Fackel.“ Der alte, gebrechliche aber weise Magier sah sich in seiner Runde um und nickte bedächtig: „Wir sind nicht alle so gut zu Fuß wie der Elb. Er wird die Brücke in 1 Minute überqueren können, aber der Krieger braucht schon die doppelte Zeit, der Zwerg das fünffache und ich selbst mit meinem Rheuma werde 10 Minuten brauchen.“ „Dann schaffen wir es nicht“, meinte der übermütige Krieger. „Ach was soll’s! Stellen wir uns ihnen zum Kampf. Wir werden nicht die einzigen sein, die diese Nacht nicht überleben.“ Magier: „Nicht so voreilig, mein Freund. Wer wird denn gleich ans Sterben denken. Die Zeit reicht doch!“ Zwerg: „Ach, und wie soll das gehen?“

Wie lautet die Antwort des Magiers?

P.S: Tragen gilt nicht und die Fackel muss immer hin und her!

