Universität Ulm
Irene Bouw
Michaela Eskin-Hämmerle

WS 13/14

Grundlagen der Mathematik

Blatt 7

Aufgabe 1 (1 + 1 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 = 8 Punkte)

Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen? Begründe deine Antwort.

a) $M_1 = \{\text{Menschen}\}$, $R_1 = \{(x, y) \in M_1 \times M_1 \mid x \text{ ist mit } y \text{ verwandt}\}$[1]

b) $M_2 = \{\text{Menschen}\}$, $R_2 = \{(x, y) \in M_2 \times M_2 \mid x \text{ lebt im gleichen Land wie } y\}$

c) $M_3 = \mathbb{R}$, $R_3 = \{(x, y) \in M_3 \times M_3 \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$

d) $M_4 = \mathbb{R}$, $R_4 = \left\{(x, y) \in M_4 \times M_4 \mid y = x^2\right\}$

e) $M_5 = \mathcal{P}(M)$, wobei M eine Menge ist,
$R_5 = \{(x, y) \in M_5 \times M_5 \mid x = y \text{ oder } x \cap y = \emptyset\}$

f) $M_6 = \mathbb{R}$, $R_6 = \{(x, y) \in M_6 \times M_6 \mid \exists \lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ mit } x = \lambda y\}$

Aufgabe 2 (1 + 3 = 4 Punkte)

Sei $f : A \longrightarrow B$ eine surjektive Funktion. Wir definieren die Relation

$$R := \{(a_0, a_1) \in A \times A \mid f(a_0) = f(a_1)\}\,.$$

a) Zeige, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

b) Sei $A^* := \{C_a \mid a \in A\}$ die Menge der Äquivalenzklassen.
Zeige, dass die Funktion $\phi : A^* \longrightarrow B, \quad C_a \longmapsto f(a)$ bijektiv ist.

Aufgabe 3 (2 + 2,5 = 4,5 Punkte)

a) Gegeben sei die Äquivalenzrelation $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) :\Longleftrightarrow y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Beschreibe die Äquivalenzklassen $C_{(x,y)}$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und zeichne die Äquivalenzklasse $C_{(0,1)}$ in die Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein.

b) Gegeben sei eine Äquivalenzrelation R. Wir definieren die Relation $\tilde{R} := \{(a, b) \mid (b, a) \in R\}$.
Zeige, dass auch $\tilde{R}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Behauptung: Jede Relation, die symmetrisch und transitiv ist, ist automatisch auch reflexiv.
Beweis: Sei R eine symmetrische und transitive Relation auf einer Menge M. Da R symmetrisch ist, gilt für $a, b \in M$: $aRb \Longrightarrow bRa$. Wegen der Transitivität folgt aus aRb und bRa dann aRa. Also ist R auch reflexiv.

Die Behauptung ist aber falsch. Also muss im Beweis ein Fehler sein. **Finde den Fehler!**

[1] Bedenke, dass es einen Unterschied zwischen verwandt und verschwägert gibt.

Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unnmöglich ist.
Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Aufgabe 5 (0,5 + 1 = 1,5 Punkte)

Gegeben sei die Menge $M := \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid b \neq 0\}$ und die Äquivalenzrelation $\sim_{\mathbb{Q}}$ mit

$$(a,b) \sim_{\mathbb{Q}} (c,d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

a) Stelle die Aquivalenzklassen $C_{(1,2)}$, $C_{(1,1)}$ und $C_{(2,1)}$ graphisch dar.

b) Wie kann man eine beliebige Äquivalenzklasse $C_{(a,b)}$ geometrisch beschreiben?
Hinweis: Wie würde das Bild aussehen, wenn man $C_{(a,b)}$ analog zu den Äquivalenzklassen in a) graphisch darstellt? Unterscheide die Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$.

Bonusaufgabe (2 Punkte)

Du bist auf einer Party und lernst ein nettes Mädchen/einen netten Jungen kennen. Nun möchtest du unbedingt ihren/seinen Geburtstag, ihr/sein Alter und ihre/seine Schuhgröße wissen ohne einfach nur danach zu fragen.
In dieser Situation können dir folgende zwei Spiele hilfreich sein:
Sei m die Zahl des Monats ($m \in \{1, \dots, 12\}$) und t der GeburtsTAG (Beispiel: 13. Juni, das heißt $m = 6$ und $t = 13$). Gehe nun vor wie folgt:

1) Multipliziere die Zahl des Monats mit 5.

2) Addiere dazu die Zahl 7.

3) Multipiziere das Ergebnis des vorhergehenden Schrittes mit 4.

4) Addiere die Zahl 13.

5) Multipiziere das Egebnis mit 5.

6) Addiere den GeburtsTAG

7) Subtrahiere die Zahl 205.

Lass dir das Ergebnis nennen. Die Hunderterstelle verrät uns den Monat, der Rest den Tag der Geburt.
Zahlenbeispiel: Geburtstag 13. Juni
$30 + 7 = 37$; $4 \cdot 37 = 148$; $148 + 13 = 161$; $5 \cdot 161 = 805$; $803 + 13 = 818$; $818 - 205 = 613$
Nun das Alter und die Schuhgröße:

1) Die Altersjahre mit 20 multiplizieren.

2) Die „Zahl" des heutigen Tages addieren (zum Beispiel: 13. Juni, addiere 13).

3) Multipliziere das Ergebnis mit 5.

4) Addiere nun die Schuhgröße (zum Beispiel 38).

Von diesem Zwischenergebnis musst du nun **im Kopf** das Fünffache der Zahl des heutigen Tages abziehen. Nun geben uns die Hunderter und die Tausender das gesuchte Alter, der Rest die Schuhgröße an (zum Beispiel ergibt 2038 das Alter von 20 Jahren und eine Schuhgröße von 38 an).

Beantworte nun folgende Frage:
Wie funktionieren diese beiden „Spiele"?

Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unnmöglich ist.
CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 - 1855)