

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik

WS 2013 – Blatt 02

Abgabetermin: Mittwoch, 30.10.2013 um 16:15 Uhr vor Beginn der Übungen

1. Rechnen Sie die Körperaxiome der Multiplikation und das Distributivgesetz für den Körper $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ mit

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \text{als Addition}$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad \text{als Multiplikation}$$

nach. (5 P)

2. Ein 3×3 -Zahlenschema

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

heißt magisches Quadrat, wenn alle Zeilensummen, alle Spaltensummen und alle Diagonalsummen einander gleich sind. Man fasse die magischen Quadrate als Teilmenge M des $\mathbb{R}^9$ auf. Es sei M_c die Menge der $x \in M$ mit Zeilensumme $c \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass M ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^9$ ist. (3 P)

(b) Zeigen Sie, dass M_c nur für $c = 0$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^9$ ist. (2 P)

3. Gegeben seien die magischen Quadrate

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass jedes $x \in M$ eine eindeutige Darstellung

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ hat. (3 P)

(b) Auf wie viele Arten kann man ein magisches Quadrat bilden, wenn die erste Zeile vorgegeben ist? (1 P)

(c) Auf wie viele Arten kann man ein magisches Quadrat bilden, wenn die zweite Zeile vorgegeben ist? (1 P)

Bemerkung: Beweisen Sie jeweils Ihre Antworten!

4. (a) Sind die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

$$W_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}$$

$$W_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 \geq 0\}$$

$$W_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = x_2 = -x_3\}$$

(3 P)

(b) Untersuchen Sie, ob $\{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(-x) = f(x)\}$ ein Untervektorraum von $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist. (2 P)