Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 2013 – Blatt 04

Abgabetermin: Mittwoch, 13.11.2013 um 16:15 Uhr vor Beginn der Übungen

---

1. Es seien $U_1, \ldots, U_r \subset V$ Untervektorräume des endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (i) Jedes $v \in V$ hat genau eine Darstellung $v = u_1 + \ldots + u_r$ mit $u_i \in U_i$.

   (ii) $\dim V = \sum_{i=1}^{r} \dim U_i$ und $V = U_1 + \ldots + U_r$.

   (5 P)

2. Es sei K ein Körper und $a_0, \ldots, a_n \in K$ mit $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$. Weiter sei $f_i \in K[X]$ über
$$f_i := \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$
definiert.

   (a) Zeigen Sie, dass $f_i(a_i) = 1$ und $f_i(a_j) = 0$ für $j \neq i$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass $S := (f_i)_{i=0}^{n}$ ein linear unabhängiges System in $K[X]$ ist, und dass $\langle S \rangle = P_n := \{f \in K[X] \, ; \, \operatorname{grad} f \leq n\}$ gilt.

   (c) Es seien $b_0, \ldots, b_n \in K$ beliebig. Zeigen Sie, dass es genau ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad höchstens n gibt, das $f(a_i) = b_i$ für $i = 0, \ldots, n$ erfüllt.

   (6 P)

3. Berechnen Sie für $f = X^3 + X^2 + X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und $g = X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ explizit die Polynome $q, r \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f = q \cdot g + r$, wobei der Grad von r echt kleiner als der Grad von g ist. (3 P)

4. Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie jeweils eine Basis eines direkten Summanden der folgenden Unterräume.

   (a) $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

   (b) $U_2 = \{0\}$

   (c) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, ; \, x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$

   (d) $U_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

   (4 P)