

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik

WS 2013 – Blatt 05

Abgabetermin: Mittwoch, 20.11.2013 um 16:15 Uhr vor Beginn der Übungen

1. Es sei $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ eine Funktion. Weiter sei

$$f_\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m ; (x_i)_{i=1}^n \mapsto (x_{\sigma(i)})_{i=1}^m$$

- (a) Zeigen Sie, dass f_σ eine lineare Abbildung ist. (2 P)
(b) Berechnen Sie eine Basis von $\text{Ker } f_\sigma$ und $\text{Bi } f_\sigma$. Wann ist f_σ bijektiv? (2 P)
2. (a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} ?$$

Begründen Sie Ihre Antwort. (3 P)

- (b) Falls f in (a) existiert, so bestimmen Sie $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von λ . (1 P)
(c) Falls f in (a) existiert, so bestimmen Sie eine Basis von $\text{Bi}(f)$ und $\text{Ker}(f)$ in Abhängigkeit von λ . (2 P)
3. Es sei $P_n \subset \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Raum der Polynomabbildungen vom Grad $\leq n$. Betrachten Sie die Abbildung:

$$T: P_n \rightarrow P_n, f \mapsto f(x) + f(-x).$$

- (a) Zeigen Sie: T ist linear. (2 P)
(b) Bestimmen Sie $\text{Ker}(T)$ und $\text{Bi}(T)$. (3 P)

Hinweis: Die Teilmengen

$$V_1 := \{f \in P_n ; f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$
$$V_2 := \{f \in P_n ; f(x) = -f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

sind Untervektorräume des P_n und es gilt $P_n = V_1 \oplus V_2$.

4. Sei $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = f$.

Zeigen Sie, dass $V = \text{Ker } f \oplus \text{Bi } f$ gilt. (5 P)