

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik

WS 2013 – Blatt 06

Abgabetermin: Mittwoch, 27.11.2013 um 16:15 Uhr vor Beginn der Übungen

1. Es sei $A \in M(m \times n, K)$ eine Matrix mit $m < n$. Zeigen Sie, dass es eine Matrix $B \in M(n \times 1, K) \setminus \{0\}$ mit $AB = 0$ gibt. (5 P)
2. Es seien V und W Vektorräume und I eine endliche Menge. Weiter seien $(v_i)_{i \in I}$ und $(w_i)_{i \in I}$ Systeme in V beziehungsweise W . Zeigen Sie, dass es genau dann eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i \in I$ gibt, wenn

$$\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0$$

stets

$$\sum_{i \in I} \lambda_i w_i = 0$$

impliziert.

(5 P)

Hinweis: Sie dürfen voraussetzen, dass V endlichdimensional ist.

3. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung mit

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ mal}} = 0$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\dim V \leq n \cdot \dim \ker f$ gilt.

(5 P)

4. Es seien $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$.

Bestimmen Sie zwei Polynome $f, g \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad kleiner oder gleich 3 mit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f(0) \\ g(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} f(1) \\ g(1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} f'(0) \\ g'(0) \end{pmatrix} &= 3 \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) \text{ und} \\ \begin{pmatrix} f'(1) \\ g'(1) \end{pmatrix} &= 3 \left(\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Dabei ist $(a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0)' = (3a_3 X^2 + 2a_2 X + a_1)$ die formale Ableitung des Polynoms.

Wählen Sie die Punkte $(0, 0), (-6, 4), (-2, 7), (0, 4)$ sowie $(0, 0), (6, 4), (2, 7), (0, 4)$ und fertigen Sie eine Skizze von $\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 1$ an. (5 P)