

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik

WS 2013 – Blatt 07

Abgabetermin: Mittwoch, 04.12.2013 um 16:15 Uhr vor Beginn der Übungen

1. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \underline{v} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \underline{w} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Berechnen Sie

$$\frac{\underline{v}}{\underline{w}} L(A) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(6 P)

2. Bringen Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 14 & 10 \\ 1 & 2 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

mittels elementarer Zeilenumformungen auf Zeilen-Stufenform.

(5 P)

3. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ und $P_n := \{f \in \mathbb{R}[X] ; \text{grad } f \leq n\}$ der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n . Weiter sind

$$\underline{v} := (1, X, \dots, X^n) \quad \text{und} \quad \underline{w} := (1, X - a, \dots, (X - a)^n)$$

zwei Basen des P_n .

Die formale Ableitung eines Polynoms $f = \sum_{i=0}^m a_i X^i$ ist das Polynom

$$f' := \sum_{i=0}^{m-1} (i+1) a_{i+1} X^i.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $f^{(k)} := f^{(k-1)'}$ als die k -te formale Ableitung von f , dabei ist $f^{(0)} := f$.

- (a) Stellen Sie $\frac{\underline{v}}{\underline{w}} M(\text{id})$ und $\frac{\underline{w}}{\underline{v}} M(\text{id})$ auf. (5 P)

Hinweis: Verwenden Sie die binomische Formel.

- (b) Zeigen Sie mittels Induktion, dass die k -te formale Ableitung von X^n für $k \leq n$ gerade gleich $\frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ ist. (2 P)

- (c) Zeigen Sie, dass für alle Polynome $f \in P_n$ stets

$$f = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

gilt.

(2 P)