

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik

WS 2013 – Blatt 09

Abgabetermin: Mittwoch, 18.12.2013 um 16:15 Uhr vor Beginn der Übungen

1. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} -6 & 17 & -20 & 18 \\ -1 & 5 & -6 & 6 \\ 1 & -4 & 5 & -5 \\ -6 & 18 & -22 & 21 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det A$ mit Hilfe elementarer Matrixumformungen. (3 P)

2. Zeigen oder widerlegen Sie:

Für quadratische Matrizen $A, B, C, D \in M(n \times n, K)$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D) - \det(B) \det(C)$$

(5 P)

3. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -4 & -7 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Finden Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ für das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. (3 P)
- (b) Finden Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ für das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. (3 P)

4. Gegeben sei die *Van der Mondesche Matrix*

$$D_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in K^{(n+1) \times (n+1)}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $x_0, \dots, x_n \in K$.

Beweisen Sie:

$$\det D_{n+1} = \prod_{0 \leq \nu < \mu \leq n} (x_\mu - x_\nu).$$

(6 P)

Hinweis: Bringen Sie die erste Spalte in eine besonders einfache Form und beweisen Sie die Aussage durch vollständige Induktion.