

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik

WS 2013 – Blatt 10

Abgabetermin: Mittwoch, 8.1.2014 um 16:15 Uhr vor Beginn der Übungen

1. Es sei f ein Endomorphismus des endlich-dimensionalen K -Vektorraums V . Weiter seien $U, W \neq 0$ zwei f -invariante Unterräume, also $f(U) \subset U$ und $f(W) \subset W$. Außerdem gelte $V = U \oplus W$. Zeigen Sie, dass

$$\det f = \det f|_U \cdot \det f|_W$$

gilt.

Hinweis: Wählen Sie die Basis für die Matrixdarstellung von f geschickt. (3 P)

2. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{Z})$ eine quadratische Matrix mit ganzzahligen Einträgen.

(a) Zeigen Sie, dass $\det A \in \mathbb{Z}$ gilt. (1 P)

(b) Zeigen Sie, dass A genau dann eine Inverse in $M(n \times n, \mathbb{Z})$ besitzt, wenn $\det A = \pm 1$ gilt. (2 P)

3. Es seien

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\sigma_1 \circ \sigma_2, \sigma_2 \circ \sigma_1, \sigma_1^{-1}$, $\text{sgn } \sigma_1$ und $\text{sgn } \sigma_2$. (4 P)

4. Es sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Ein Paar (i, j) mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ heißt Inversion von σ . Es bezeichne $r(\sigma)$ die Anzahl der Inversionen von σ .

(a) Zeigen Sie, dass jede Transposition τ eine ungerade Anzahl von Inversionen besitzt. (2 P)

(b) Zeigen Sie, dass $r(\sigma_1 \circ \sigma_2) \equiv r(\sigma_1) + r(\sigma_2) \pmod{2}$ gilt, also dass

$$(-1)^{r(\sigma_1 \circ \sigma_2)} = (-1)^{r(\sigma_1)} \cdot (-1)^{r(\sigma_2)}$$

ist. (3 P)

(c) Zeigen Sie, dass $\text{sgn } \sigma = (-1)^{r(\sigma)}$ ist. (1 P)

(d) Zeigen Sie, dass

$$\left| \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \right| = 1$$

gilt. (3* P)

(e) Zeigen Sie, dass

$$\prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \text{sgn } \sigma$$

ist. (3* P)

Mit Sternchen markierte Punktzahlen sind Bonuspunkte.