

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik

WS 2013 – Blatt 14

Abgabetermin: Mittwoch, 5.2.2014 um 16:15 Uhr vor Beginn der Übungen

1. Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $n = 169575$ und $m = 101660$ in $\mathbb{Z}$ und suchen Sie Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\gcd(n, m) = nx + my$$

gilt. (4 P)

2. Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von

$$f = X^6 + 2X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 2X^2 - 5X + 3$$

und

$$g = X^6 + X^5 - 5X^4 + 3X^3 - 3X^2 - 6X + 9$$

in $\mathbb{Q}[X]$ und suchen Sie Polynome $p, q \in \mathbb{Q}[X]$, so dass $\gcd(f, g) = pf + qg$ gilt. (5 P)

3. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus. Weiter seien $p, q \in K[X]$ mit $\gcd(p, q) = 1$ und $c(f, X) = p(X) \cdot q(X)$.

Zeigen Sie, dass es zwei Räume U und W mit $f(U) \subset U$ und $f(W) \subset W$ gibt, sodass $\dim U = \deg p$ und $V = U \oplus W$ gilt. (6 P)

4. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zwei Matrizen aus $M(10 \times 10, K)$. Gibt es eine Matrix $S \in GL(10, K)$, so dass $A = SBS^{-1}$ gilt? (5 P)