

Satz 6.4.6 *Es sei V ein K -Vektorraum der Dimension $n < \infty$ und φ ein Endomorphismus von V . Für $\lambda \in K$ sei*

$$m := \mu((m(\varphi, X), \lambda)) ,$$

$$r := \min\{t \in \mathbb{N} ; \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^t = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^{t+1}\} .$$

Dann gilt $m = r$.

Beweis. Offenbar gilt $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^t \subset \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^{t+1}$ für alle $t \in \mathbb{N}$. Wegen $\dim V = n < \infty$ gilt $r \leq n$. Dann zeigen wir zuerst

$$H := \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^r = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^t \text{ für alle } t \geq r .$$

Ist nämlich $x \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^{t+1}$ für ein $t \geq r$, so gilt

$$0 = (\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^{t+1}(x) = (\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^{r+1} \circ (\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^{t-r}(x) .$$

Also ist $(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^{t-r}(x) \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^{r+1} = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^r$ und somit gilt $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^t(x) = 0$. Das bedeutet $x \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^t$. Mit Induktion folgt die Behauptung. Wir schreiben nun

$$m(\varphi, X) = (X - \lambda)^m \cdot P(X)$$

mit einem Polynom $P(X) \in K[X]$ und $P(\lambda) \neq 0$. Dann gilt für jedes $x \in V$

$$(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^m \circ P(\varphi)(x) = 0 .$$

Also gilt $P(\varphi)(x) \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^m \subset \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^r$ und daher ist

$$(\varphi - \lambda)^r \cdot P(\varphi) = 0 .$$

Das impliziert $m \leq r$ nach Definition des Minimalpolynoms, weil $P(X)$ teilerfremd zu $(X - \lambda)$ ist. Nun ist $P(\varphi)|_H = P(\lambda) \cdot \operatorname{id}_H + \psi$, wobei ψ nilpotent ist. Daher ist $P(\varphi)|_H$ nach 6.1.8 ein Automorphismus von H . Also gilt $P(\varphi)(H) = H$. Dann gilt

$$(\varphi - \lambda)^m(H) = (\varphi - \lambda)^m \circ P(\varphi)(H) = m(\varphi, \varphi)(H) = 0$$

Nach Wahl von r muss dann $m \geq r$ gelten. □