

Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik

WS 2013/2014 – Probeklausur

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

05.02.2014

1. Es sei

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3 .$$

Bestimmen Sie einen Unterraum U_2 von $\mathbb{R}^3$, so dass $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$ gilt.

(6)

2. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\varphi : P_4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 ; \varphi(f) = (f(0), f(1), f(2), f(-1))$$

Dabei ist

$$P_4 := \{f \in \mathbb{R}[X] ; \deg(f) \leq 4\} .$$

(a) Zeigen Sie, dass φ surjektiv ist.

(b) Bestimmen Sie alle Polynome $f \in P_4$ mit $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 8$ und $f(-1) = -1$.

(8+4)

3. Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 & -10 & 6 \\ -6 & -6 & 8 & 14 & -2 \\ 3 & 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} ; b := \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

über den reellen Zahlen.

(a) Berechnen Sie $\dim L(A; 0)$.

(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum $L(A; b)$.

(c) Geben Sie eine Basis des Spaltenraums von A an.

(4+8+4)

4. (a) Geben Sie die Determinatenformel von Leibniz an.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -6 & -7 \\ 1 & -3 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}) .$$

(2+6)

5. (a) Nennen Sie ein Kriterium dafür, dass $A \in M(n \times n, K)$ diagonalisierbar ist.
 (b) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -9 & 0 & 4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -20 & 0 & 9 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

diagonalisierbar ist und bestimmen Sie ein $S \in GL(3, \mathbb{R})$, so dass $S^{-1}AS = D$ diagonal ist.

Hinweis: $c(A, X)$ durch Entwickeln nach der 2-ten Spalte.

- (c) Berechnen Sie A^{74} .

(2+10+4)

6. Es sei x_n eine Folge mit $x_0 := -1$ und $x_1 := 1$ sowie $x_{n+1} := 4x_n - 3x_{n-1}$.

- (a) Bestimmen Sie eine Matrix A so, dass $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$.
 (b) Bestimmen Sie eine Matrix S so, dass $A = SDS^{-1}$ mit einer Diagonalmatrix D gilt.
 (c) Berechnen Sie A^n und folgern Sie eine explizite Formel für x_n .

(4+6+6)

7. Es sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grade kleiner oder gleich 2 und $\underline{v} = (1, X, X^2)$ eine Basis. Außerdem sei $f: P_2 \rightarrow P_2$; $p \mapsto p'' + 2p' + p$, wobei p' die formale Ableitung des Polynoms p ist.

- (a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\underline{v}M(f) \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$.
 (b) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(6+4)

8. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum der Dimension $n \geq 1$ und $f \in \text{End}_K(V)$ mit einem Eigenwert λ . Zeigen Sie:

- (a) Ist $p \in K[X]$ ein Polynom, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(f)$ ist.
 (b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom des Null-Endomorphismus.
 (c) Das Minimalpolynom von f sei $m(f, X) = X \cdot (X - 1)$ und $\dim \text{Ker}(f) = n - 2$.
 Wie groß ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwert 1.
 (d) Falls $f = f \circ f$ gilt, so ist f diagonalisierbar.

(4+2+6+4)