Algebra (Wintersemester 2014/15)

Blatt: 3
Punkte: 20

Stefan Wewers, Michel Börner

Abgabe **zu zweit oder zu dritt** vor der Vorlesung am Di., **04.11.14** oder am gleichen Tag in He18, Zimmer E07 (ggf. unter der Tür durchschieben).

Aufgabe 1 (Galoisgruppe) (3+2+2+3 = **10 P**)

Dies ist eine Fortsetzung von Aufgabe 2, Blatt 2. Wir bezeichnen mit ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel.
Seien $f(x) = x^3 - 2$ und $\theta_i = \zeta_3^{i-1}\sqrt[3]{2}$ die drei komplexen Nullstellen von f. Sei weiter L der Zerfällungskörper von f und $G := G(f)$ dessen Galoisgruppe.

a) Zeigen Sie: $G \simeq S_3$.
(Wir schreiben auch oft $G = S_3$.)

b) Geben Sie alle Untergruppen von S_3 (bzw. deren Erzeuger) in Zykelschreibweise an. Welche davon sind Normalteiler und warum?

c) Bestimmen Sie ein Element $\alpha \in L$ mit $\sigma(\alpha) = \alpha$ für $\sigma = (1\ 2\ 3)$ und $\tau(\alpha) \neq \alpha$ für $\tau = (1\ 2)$.

d) Bestimmen Sie vier verschiedene echte Zwischenkörper $M_1, \ldots, M_4$ von $L/\mathbb{Q}$. Tragen Sie diese in einem Körperdiagramm zusammen mit den Körpergraden aus Aufgabe 2, Blatt 2 ein und geben Sie jeweils an, welche Untergruppe von S_3 den Körper M_i festlässt.
(Der Zusatz *echt* bedeutet $M_i \neq \mathbb{Q}, M_i \neq L$.)

Aufgabe 2 (Zerfällungskörper) (2+1+2 = **5 P**)

Sei $g(x) = x^5 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Zerlegen Sie g über $\mathbb{Q}$ in irreduzible Faktoren.
Hinweis: Für den Test auf Irreduzibilität kann Reduktion modulo 2 hilfreich sein.

b) Zeigen Sie: $L := \mathbb{Q}[\zeta_5]$ ist der Zerfällungskörper von g.

c) Fassen Sie die Galoisgruppe $G(g)$ als Untergruppe von S_5 auf und zeigen Sie: $G(g)$ ist zyklisch mit Ordnung 4. Geben Sie insbesondere einen Erzeuger in Zykelschreibweise an.

Aufgabe 3 (transzendente Körpererweiterung) (2+3 = **5 P**)

Sei K ein Körper und $L = K(x) = \{f/g \mid f, g \in K[x], g \neq 0\}$ der *rationale Funktionenkörper* in der Variable x.

a) Sei $y := \frac{f}{g} \in L \setminus K$ ein Element mit $\mathrm{ggT}(f, g) = 1$. Zeigen Sie: y ist transzendent über K.

b) Zeigen Sie: $L/K(y)$ ist endlich und genauer gilt $[L : K(y)] = \max\{\deg f, \deg g\}$.