Algebra (Wintersemester 2014/15)

Stefan Wewers, Michel Börner

Blatt: 4
Punkte: 20

Abgabe **zu zweit oder zu dritt** vor der Vorlesung am Di., **11.11.14** oder am gleichen Tag in He18, Zimmer E07 (ggf. unter der Tür durchschieben).

Aufgabe 1 (Inseparable Körpererweiterung) (1+2+2 = **5 P**)

Sei K ein Körper der Charakteristik p.

a) Sei $f \in K[X]$ so dass $f' = 0$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $g \in K[X]$ mit $f = g(x^p)$.

b) Sei $f \in K[X]$ irreduzibel.
Zeigen Sie: Es gibt ein $g \in K[X]$ und ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $f = g(x^{p^r})$, g irreduzibel u. separabel.

c) Sei L/K eine endliche Körpererweiterung und $\alpha \in L$.
Zeigen Sie: Es gibt eine Zahl $r \in \mathbb{N}_0$ so dass $\beta := \alpha^{p^r}$ separabel über K ist
und $\big[K[\alpha] : K[\beta]\big] = p^r$ gilt.

Aufgabe 2 (Zwischenkörper) (1+1+1+1+1 = **5 P**)

Seien $M/L/K$ jeweils endliche Körpererweiterungen. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) M/K normal $\Longrightarrow$ M/L normal
b) M/K normal $\Longrightarrow$ L/K normal
c) M/K separabel $\Longrightarrow$ M/L separabel
d) M/K galoissch $\Longrightarrow$ M/L galoissch
e) M/L , L/K galoissch $\Longrightarrow$ M/K galoissch

Aufgabe 3 (Galois-Theorie) (2+1+2+2 = **7 P**)

Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

a) Sei $[L : K] = 2$. Zeigen Sie: Es gibt ein Element $D \in K, D$ kein Quadrat, mit $L = K[\sqrt{D}]$.

b) Zeigen Sie: Die Erweiterung L/K aus a) ist galoissch.

c) Zeigen Sie, dass die Aussagen a) und b) ohne die Bedingung $\mathrm{char}(K) \neq 2$ falsch sind.

d) Seien D_1, D_2 Elemente aus K so dass D_1, D_2, D_1D_2 keine Quadrate sind. Sei weiter $L := K[\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2}]$.
Zeigen Sie: L/K is eine Galois-Erweiterung mit $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4 (Gruppentheorie) (2+1 = **3 P**)

a) Zeigen Sie: Es gibt bis auf Isomorphie genau 2 verschiedene Gruppen G_1, G_2 der Ordnung 4.

b) Finden Sie für G_1 und G_2 jeweils eine transitive Untergruppe U_1, U_2 von S_4 mit $G_i \simeq U_i$.