Algebra (Wintersemester 2014/15)

Blatt: 5

Stefan Wewers, Michel Börner

Punkte: 20+5

Abgabe **zu zweit oder zu dritt** vor der Vorlesung am Di., **18.11.14** oder am gleichen Tag in He18, Zimmer E07 (ggf. unter der Tür durchschieben). **Bitte auch das Moodle-Forum nutzen!**

Aufgabe 1 (Körpererweiterungen) $(2+3+5^* = \mathbf{5+5^*\ P})$

Sei K ein Körper.

a) Sei $G \leq S_n$ eine transitive Untergruppe.
Zeigen Sie: Falls G abelsch ist, so gilt für $\sigma \in G$, $\sigma \neq (1)$: $\sigma(i) \neq i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

b) Sei $f \in K[X]$ ein separables und irreduzibles Polynom. Bezeichne mit L/K den Zerfällungskörper von f.
Zeigen Sie: Wenn $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ abelsch ist, so folgt: $L = K[\theta]$ für jede Nullstelle θ von f.
Hinweis: Benutzen Sie Teilaufgabe a) und den Hauptsatz der Galoistheorie.

c*) Beweisen oder widerlegen Sie: In a) und b) gilt jeweils auch die Umkehrung.

Aufgabe 2 (Kreisteilungskörper) $(1+2 = \mathbf{3\ P})$

Wir betrachten den n-ten Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu_n})$. Dabei ist $\boldsymbol{\mu_n}$ die Menge der n-ten Einheitswurzeln.

a) Bestimmen Sie das Kreisteilungspolynom Φ_9.
Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse aus *Elemente der Algebra*.

b) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper M_i der Erweiterung $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu_9})/\mathbb{Q}$ und tragen Sie diese zusammen mit Untergruppen $H_i < \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}^*$ in ein Körperdiagramm, so dass jeweils $M_i = L^{H_i}$ gilt.

Aufgabe 3 (Galois-Theorie) $(2+3+3 = \mathbf{8\ P})$

a) Geben Sie (ohne Beweis) ein Diagramm aller Untergruppen der Diedergruppe D_4 in Zykelschreibweise an. Verbinden Sie dabei alle Untergruppen, die Untergruppen voneinander sind.
Hinweis: Betrachten Sie D_4 als Symmetriegruppe des Quadrats. Es gibt 9 echte Untergruppen.

b) Sei L/K eine Galoiserweiterung von der Form $L = K[\alpha]$, wobei ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ existiert, sodass $a := \alpha^n$ in K liegt.
Zeigen Sie: $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ ist zyklisch, genauer $G = \langle \sigma \rangle$ mit $\zeta := \sigma(\alpha)/\alpha \in \boldsymbol{\mu_n}(K)$ (d.h. ζ ist eine n-te Einheitswurzel in K).

c) Sei $f := x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.
Zeigen Sie: $G(f) \simeq D_4 = \langle (1\,2\,3\,4), (2\,4) \rangle$ (bei geeigneter Nummerierung).
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{Q}[i]$ im Zerfällungskörper L von f enthalten ist. Bestimmen Sie dann die Galoisgruppe von ${}^{L}/_{\mathbb{Q}[i]}$ mit Hilfe von Teilaufgabe b).

Aufgabe 4 (Gruppen) $(2+2 = \mathbf{4\ P})$

a) Bestimmen Sie alle transitiven Untergruppen von $A_4 < S_4$.

b) Sei $G \leq S_4$ eine transitive Untergruppe.
Zeigen Sie: Falls G einen 3-Zykel enthält, so gilt $A_4 \leq G$.