



Abgabe **zu zweit oder zu dritt** vor der Vorlesung am Di., 25.11.14 oder am gleichen Tag in He18, Zimmer E07 (ggf. unter der Tür durchschieben). **Bitte auch das Moodle-Forum nutzen!**

Aufgabe 1 (Diskriminante)**(3+2 = 5 P)**

- a) Sei $f := x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$, $n \geq 2$, und D_f die Diskriminante von f .
Vorüberlegung: Was sagt das Vorzeichen von D_f über die Anzahl der komplexen Nullstellen von f aus? Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz einer reellen Nullstelle von f an (in Termen von D_f und n).
- b) Sei $f = x^3 + ax^2 + bx \in K[x]$ für einen beliebigen Körper K .
Leiten Sie die Formel für die Diskriminante $D_f = D_f(a, b)$ her.
Hinweis: Verwenden Sie die Formel für die Diskriminante eines quadratischen Polynoms.

Aufgabe 2 (Symmetrische Polynome)**(2+2+2 = 6 P)**

Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$ sei $p_k := \sum_{i=1}^n t_i^k \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]^{S_n}$ und $q := \sum_{i < j} t_i^2 t_j^2$.

- a) Sei $n = 3$. Schreiben Sie p_1, p_2, p_3 und q als Polynome in den elementarsymmetrischen Polynomen $s_1 = -(t_1 + t_2 + t_3)$, $s_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3$, $s_3 = -t_1t_2t_3$.
- b) Sei $f := x^3 + x^2 - x + 1 = \prod_i (x - \alpha_i)$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$.
Bestimmen Sie (ohne Benutzung der konkreten Werte $\alpha_i \in \mathbb{C}$) die Zahlen $a := \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \in \mathbb{Z}$ sowie $b := \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 \in \mathbb{Z}$.
- c) Bestimmen Sie **das** Minimalpolynom von α_1^2 (und α_2^2, α_3^2) aus Teilaufgabe b).

Aufgabe 3 (Kubische Resolvente)**(5 P)**

Sei $f = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \in K[x]$ und schreibe $f = \prod_{i=1}^4 (x - \alpha_i)$, $\alpha_i \in L$ mit dem Zerfällungskörper L von f .

Definiere $\beta_1 := \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4$, $\beta_2 := \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3$, $\beta_3 := \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4$,
sowie $g = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3) = x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$.

Zeigen Sie zunächst

- $b_1 = -a_2$
- $b_2 = a_1a_3 - 4a_4$

Hinweis: Es gilt weiter $b_3 = 4a_2a_4 - a_3^2 - a_1^2a_4$. Dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

und schließen Sie daraus, dass $D_f = D_g$.

Aufgabe 4 (Galoisgruppe)**(4 P)**

Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Polynoms $f = x^4 + x + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

Hinweis: $D_f = 229$.