Algebra (Wintersemester 2014/15)

Stefan Wewers, Michel Börner

Blatt: 11
Punkte: 20

Abgabe zu zweit oder zu dritt vor der Vorlesung am Di., **20.01.15** oder am selben Tag in He18, Zimmer E07 (ggf. unter der Tür durchschieben).

Aufgabe 1 (Lexikographische Ordnung) (2+1+2 = **5 P**)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(M := \{x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} \mid k_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}\}, \cdot)$ das Monoid der Monome von $K[x_1, \ldots, x_n]$. Wir definieren auf diesem Monoid eine *lexikographische Ordnung* in folgender Weise:

$$x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} > x_1^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\ell_n} :\iff k_i = \ell_i \text{ für } i \in \{1, \ldots, j-1\}, \text{ und } k_j > \ell_j \text{ für ein } j \in \{1, \ldots, n\}$$

Weiter sei $a \geq b \iff a > b$ oder $a = b$.
Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $>$ ist eine Totalordnung auf M (4 Eigenschaften)

b) $m_1 > m_2 \Longrightarrow m_1 \cdot m_3 > m_2 \cdot m_3 \; \forall \, m_3 \in M$

c) $>$ ist eine *Wohlordnung*, d.h. jede nichtleere Teilmenge von M besitzt ein kleinstes Element.

Aufgabe 2 (Gröbnerbasen) (2+2+2 = **6 P**)

Seien $f_1, \ldots, f_m \in K[x_1, \ldots, x_n]$ und $I := (f_1, \ldots, f_m)$. Die Menge $\{f_1, \ldots, f_m\}$ heißt *Gröbner-Basis* von I, falls für jedes Element $g \in I$ ein Index i existiert mit $\mathrm{LT}(f_i) \mid \mathrm{LT}(g)$. Dabei ist

$$\mathrm{LT}(\sum_{m \in M} c_m \cdot m) := \max\{c_m \cdot m \mid c_m \neq 0\}$$

der Leitterm, definiert mit der Ordnung $>$ aus Aufgabe 1.

Sei $f_1 := x + y, f_2 := y - z$ sowie $I := (f_1, f_2) \lhd K[x, y, z]$.

a) Zeigen Sie: $\{f_1, f_2\}$ ist eine Gröbner-Basis von I.

b) Liegt das Polynom $g := x^3 - yz^2 + xyz - xy^2$ in I? Begründen!

c) Sei $f_3 := x^3 - 2xy, f_4 := x^2y - 2y^2 + x$.
Zeigen Sie: $\{f_3, f_4\}$ ist **keine** Gröbner-Basis von $J := (f_3, f_4)$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $x^2 \in J$.

Aufgabe 3 (Freie Moduln) (1+1+1+1+1 = **5 P**)

Welche der folgenden Moduln über dem Ring R sind frei? (Begründen!) Geben Sie für jeden Modul ein möglichst kleines Erzeugendensystem an und – falls er frei ist – eine Basis.

a) $R = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Q}$

b) $R = \mathbb{Z}, M = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{Z}^3$

c) $R = \mathbb{K}[x, y]$, $M = \ker \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \subseteq R^2$ oder anders: $M = \{xf + yg = 0 \mid f, g \in R\}$

d) $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $M = (\overline{2}) \lhd R$

e) $R = \mathbb{K}[x, y]$, $M = \operatorname{im} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \subseteq R$

Aufgabe 4 (Torsionsuntermodul) (1+2+1 = **4 P**)

Sei R ein (kommutativer nullteilerfreier) Ring und M ein R-Modul. Wir definieren

$$M_{\text{tor}} := \{m \in M \mid \text{es ex. } a \in R \setminus \{0\} \text{ mit } a \cdot m = 0\}.$$

Zeigen Sie:

a) $M_{\text{tor}} \subseteq M$ ist ein Untermodul.

b) Falls M frei ist, folgt $M_{\text{tor}} = \{0\}$.
Hinweis: Man nennt M dann *torsionsfrei*.

c) Die Umkehrung von Teilaufgabe b) gilt nicht.