Diophantische Gleichungen: Blatt 1

Stefan Wewers
Michael Eskin

Abgabe: 21.10.2014, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden!

Aufgabe 1 *(0 Punkte)*
Melden Sie sich im SLC an!

Aufgabe 2 *(2+2+2+2+2 Punkte)*
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $xy = z^n$ und $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$. Dann gilt $x = a^n, y = b^n$ für gewisse $a, b \in \mathbb{Z}$.

(b) Seien $x, y, z, n \in \mathbb{N}$ mit $xy = z^n$ und $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$. Dann gilt $x = a^n, y = b^n$ für gewisse $a, b \in \mathbb{Z}$.

(c) Die diophantische Gleichung
$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 13$$
besitzt mindestens 4 verschiedene Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

(d) Die diophantische Gleichung
$$2x^2 - xy + y^2 = 3$$
besitzt unendlich viele Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

(e) Die diophantische Gleichung
$$3x^2 - y^2 = 5$$
besitzt keine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Aufgabe 3 *(2+2+3+2 Punkte)*
Wir betrachten die Gleichung
$$x^2 - 5y^2 = 1. \tag{1}$$
Ist R ein Ring, so bezeichnen wir mit $X(R)$ die Menge der Lösungen von $(x, y) \in R^2$ von Gleichung (1).

(a) Skizzieren Sie die Lösungsmenge $X(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$.

(b) Sei $t \in \mathbb{R}$ und L die Gerade durch den Punkt $(1, 0)$ mit der Steigung t. Bestimmen Sie die Schnittpunkte von L mit $X(\mathbb{R})$.

(c) Geben Sie mindestens 4 verschiedene Lösungen $(x_i, y_i) \in X(\mathbb{Q})$ mit $|x_i|, |y_i| \leq 3$ an und zeichnen Sie diese in Ihre Skizze unter (a) ein.

(d) Finden Sie 4 verschiedene ganzzahlige Lösungen $(x, y) \in X(\mathbb{Z})$.