Diophantische Gleichungen: Blatt 3

Stefan Wewers
Michael Eskin

Abgabe: 04.11.2014, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden!

Aufgabe 1 *(4+1+2+2+2 Punkte)*
Sei p eine Primzahl, $S \subset \mathbb{Z}$ ein Repräsentantensystem von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $x = (x_n) \in \mathbb{Z}_p$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Folge (a_i) mit $a_i \in S$ gibt, sodass

$$x_n \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i p^i \mod p^{n+1}.$$

Anmerkung: Die formale unendliche Summe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ nennt man die *p-adische Entwicklung von x (bezüglich S).*

(b) Sei nun $S = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Bestimmen Sie a_0, a_1, a_2 in der p-adischen Entwicklung für die folgenden Zahlen x (oder zeigen Sie, dass es so ein x nicht gibt).

(i) $p = 7, x = 9 \in \mathbb{Z}$

(ii) $p = 5, x = 2/3$ (d.h. x erfüllt die Gleichung $3x = 2$)

(iii) $p = 3, x$ ist eine Lösung von $x^2 = 7$

(iv) $p = 2, x$ ist eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$.

Aufgabe 2 *(4+5 Punkte)*
Wir betrachen *quadratische Formen vom Rang n* über $\mathbb{Q}$, d.h.

$$Q(x) = x^t A x = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j,$$

wobei $A = (a_{i,j})$ eine symmetrische Matrix über $\mathbb{Q}$ vom Rang n ist. Zwei quadratische Formen Q_1, Q_2 heißen *äquivalent* über $\mathbb{Q}$, falls es einen linearen Koordinatenwechsel $x = Sy$ gibt, sodass

$$Q_2(y) = Q_1(x)$$

(d.h. für die zugehörigen Matrizen A_1, A_2 gilt $A_2 = S^t A_1 S$). Man beachte, dass S in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ invertierbar, aber nicht orthogonal zu sein braucht.

(a) Sei $Q(x) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - x_3^2$. Zeigen Sie, dass Q äquivalent ist zu einer quadratischen Form

$$\tilde{Q}(x) = ax_1^2 + bx_2^2 - x_3^2$$

mit $a, b \in \mathbb{Q}, a, b > 0$. Bestimmen Sie a, b explizit.

Hinweis: Vgl. das LA II Skript von Herrn Wewers, Bemerkung 3.1.5. Das Normieren der Diagonaleinträge ist nicht nötig.

(b) Zeigen Sie, dass Q in (a) nicht äquivalent ist zu der quadratischen Form

$$W(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2.$$