Diophantische Gleichungen: Blatt 4

Stefan Wewers
Michael Eskin

Abgabe: 11.11.2014, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden!

Aufgabe 1 *(2+3+5+5* Punkte)*

(a) Sei p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie die folgende Identität in $\mathbb{Z}_p$:

$$\frac{1}{1-p^k} = \sum_{i=0}^{\infty} p^{ik}.$$

(b) Sei x in $\mathbb{Z}_3$ die 3-adische Zahl mit der Entwicklung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 3^k, \quad a_k = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } 2 \mid k \\ 2 & , \text{ andernfalls.} \end{cases}$$

Stellen Sie x als rationale Zahl dar.

Hinweis: Benutzen Sie (a).

(c) Sei $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ in $\mathbb{Z}_p$ eine p-adische Zahl mit schließlich periodischer Entwicklung (d.h. es gibt ein m und k_0, sodass $a_{k+m} = a_k$ für alle $k \geq k_0$). Zeigen Sie, dass x eine rationale Zahl ist.

(d) Zeigen Sie, dass die p-adische Entwicklung einer rationalen Zahl schließlich periodisch ist.

Hinweis: Für $x \in \mathbb{Q}$ gilt $x = \lceil x \rceil + (x - \lceil x \rceil)$.

Aufgabe 2 *(2+4+4 Punkte)*

Sei $f = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Henselschen Lemmas sämtliche Nullstellen von f in

(i) $\mathbb{Z}_2$

(ii) $\mathbb{Z}_3$

(iii) $\mathbb{Z}_{11}$.

Es reicht, die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 in der p-adische Entwicklung zu berechnen.