Diophantische Gleichungen: Blatt 6

Stefan Wewers
Michael Eskin

Abgabe: 25.11.2014, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden!

Aufgabe 1 *(4+6+3 Punkte)*
Sei K ein Körper und $a, b \in K^*$ zwei Einheiten. Wir bezeichnen in dieser Aufgabe mit $P(a, b)$ die Aussage: Die Gleichung

$$aX^2 + bY^2 = Z^2$$

besitzt eine nichttriviale Lösung in K.

(a) Angenommen $b \notin (K^*)^2$ und sei

$$L := K[\sqrt{b}] = \{\alpha = x + \sqrt{b}y \mid x, y \in K\}.$$

Sei $N_{L/K}(x + \sqrt{b}y) = x^2 - by^2$.

Zeigen Sie, dass $N_{L/K} : L^* \to L^*$ ein Gruppenhomomorphismus definiert.

Anmerkung & Hinweis: Zeigen Sie, dass "Konjugieren", d.h. $\alpha = (x + \sqrt{b}y) \mapsto x - \sqrt{b}y$ ebenfalls ein Gruppenhomomorphismus von $L^* \to L^*$ ist. Die Abbildung $N_{L/K}$ wird auch *Norm* der Körpererweiterung L/K genannt.

(b) Zeigen Sie: Für ein festes $b \in K^*$ ist

$$G_b := \{a \in K^* \mid P(a, b)\} \subset K^*$$

eine Untergruppe.

(c) Beweisen Sie die Regel

$$\left(\frac{a, c}{p}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{a, bc}{p}\right) = \left(\frac{a, b}{p}\right)$$

aus der Vorlesung.

Aufgabe 2 *(3+4 Punkte)*

(a) Sei p eine Primzahl. Für welche Elemente $a \in \mathbb{Q}_p^*$ gilt

$$\left(\frac{a, -1}{p}\right) = 1?$$

Hinweis: Unterscheiden Sie $p = 2, p \neq 2$.

(b) Für welche $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ gilt

$$\left(\frac{a, -1}{p}\right) = 1$$

für alle Primzahlen p? Die gefundene Charakterisierung sollte nur endlich viele Bedingungen an a stellen!