Diophantische Gleichungen: Blatt 9

Stefan Wewers
Michael Eskin

Abgabe: 16.12.2014, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden!

Aufgabe 1 *(2+4 Punkte)*
Sei (x_k) mit $x_k = [x_k^{(0)} : \ldots : x_k^{(n)}]$ eine Folge von Punkten in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

(a) Definieren Sie die "Konvergenz" der Folge (x_k) auf geeignete Weise.

(b) Zeigen Sie: Es gibt eine Teilfolge von (x_k) die gegen einen eindeutigen Grenzwert konvergiert (im Sinne der Definition aus (a)).

Aufgabe 2 *(2+3+4+5 Punkte)*
Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ die ebene projektive Kurve mit Gleichung

$$Y^2Z = X^3 + 3Z^3.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{X}$ eine glatte projektive Kurve ist.

(b) Sei $P = [1 : 2 : 1] \in \mathcal{X}$. Bestimmen Sie eine Gleichung für

$$L_1 := T_{\mathcal{X},P}. \quad \text{(Tangente an } \mathcal{X} \text{ durch } P\text{)}$$

(c) Seien weiter

$$L_2 = \{[x : y : z] \mid x = z\}$$
$$L_3 = \{[x : y : z] \mid z = 0\}.$$

Skizzieren Sie die Lage von $\mathcal{X}, L_1, L_2, L_3$.

Hinweis: Es kann sein, dass man für die Skizzen mehrere $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$ betrachten muss.

(d) Bestimmen Sie die Divisoren $\mathcal{X}.L_i \in \mathrm{Div}(\mathcal{X})$ für $i = 1, 2, 3$.