Elemente der Algebra: Blatt 12

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 19.01.2015, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sind zu zweit abzugeben. Einzelabgaben sind nur im Ausnahmefall gestattet!

Aufgabe 1 *(1+2+2 Punkte)*
Sei $d \in \mathbb{N}$ eine Zahl die kein Quadrat ist, d.h. $d \neq a^2$ für alle $a \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Dies ist ein Unterring von $\mathbb{R}$ (das brauchen Sie nicht zu zeigen). Sei R ein weiterer Ring der $\mathbb{Q}$ als Unterring enthält.

(a) Sei $\varphi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to R$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:

$$\varphi(x) = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{Q}.$$

(b) Zeigen Sie, dass es genau 2 Ringhomomorphismen

$$\varphi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

gibt.

Hinweis: Überlegen Sie wohin $\sqrt{2}$ abgebildet werden kann.

(c) Gibt es einen Ringhomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{3}]?$$

Begründen Sie ihre Antwort sorgfältig!

Aufgabe 2 *(1+2 Punkte)*

(a) Sei $f = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie, dass man jede Linksnebenklasse $g + (f) \in \mathbb{Q}[X]/(f)$ eindeutig schreiben kann als

$$g + (f) = \tilde{g} + (f), \quad \text{mit } \tilde{g} = a + bX.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2) \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Hinweis: Benutzen Sie den Einsetzungshomomorphismus, sowie den 1. Isomorhpiesatz.

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*
Sei $R = \mathbb{Z}[X], I = (2), J = (X)$. Zeigen Sie, dass $I \cap J$ ein Hauptideal ist indem Sie einen Erzeuger angeben, d.h. finden Sie ein $\alpha \in R$ mit $I \cap J = (\alpha)$.