

Elemente der Algebra: Blatt 13

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 26.01.2015, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sind zu zweit abzugeben. Einzelabgaben sind nur im Ausnahmefall gestattet!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei (R, N) ein euklidischer Ring. In der Vorlesung haben wir gelernt, dass zu je zwei Elemente $a, b \in R$ der größte gemeinsame Teiler $d = \text{ggT}(a, b)$ definiert ist. Diesen können wir mit Hilfe des euklidischen Algorithmus bestimmen. Dieser geht wie folgt:

Bezeichne $r_{-1} = a, r_0 = b$. Mittels der Abbildung N definiert man rekursiv $q_i, r_i \in R$, sodass

$$r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1} + r_n \quad (1)$$

mit $0 \leq N(r_n) < N(r_{n-1})$ oder $r_n = 0$. Für $m \in \mathbb{N}$ minimal sodass $r_m = 0$ ist nun $\text{ggT}(a, b) = r_{m-1}$.

Sei nun K ein Körper, $K[X]$ der Polynomring und $N : K[X] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ die Abbildung die jedem Polynom den Grad des Polynoms zuordnet.

Bestimmen Sie das Polynom $d = \text{ggT}(f, g)$ für $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f = X^3 + X^2 + X - 3$ und $g = X^6 - X^5 + 6X^2 - 13X + 7$. Finden Sie mittels Rücksubstitution von (1) $s_1, s_2 \in \mathbb{Q}[X]$ mit $s_1 \cdot f + s_2 \cdot g = d$.

Aufgabe 2 (2+2+3 Punkte)

Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein Polynom sowie $R = K[X]/(f)$.

(a) Sei $g \in K[X]$ sodass $\text{ggT}(f, g) = 1$. Zeigen Sie, dass $g + (f)$ in R eine Einheit ist.

Hinweis: Benutzen Sie Korollar 3.3.7 (d).

(b) Sei nun $f \in K[X]$ irreduzibel. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

(c) Bestimmen Sie ob die folgenden angegebenen Elemente in den jeweiligen Ringen Einheiten sind. Falls ja, geben Sie das Inverse an.

(i) $g + (f) \in \mathbb{Q}[X]/(f)$ mit g, f wie in Aufgabe 1.

(ii) $X^6 + 1 + (X^5 + X^2 + 1) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(X^5 + X^2 + 1)$.

(iii) $1 - X + (X^2 - 2) \in \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$.

Hinweis: Man denke an Aufgabe 1.