Elemente der Algebra: Probeklausur

Irene Bouw
Michael Eskin

Keine Abgabe: Die Lösungen werden eine Woche vor der Klausur auf der Webseite gestellt.

Aufgabe 1 *(3+2 Punkte)*

(a) Schreiben Sie
$$\sigma := (1\ 2\ 3)(3\ 2\ 4\ 5)(1\ 2\ 3)$$
als Produkt disjunkter Zyklen.

(b) Bestimmen Sie σ^{-1}.

Aufgabe 2 *(5 Punkte)*
Sei
$$H = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4) \rangle \subset S_4.$$
Zeigen Sie, dass H isomorph zur Diedergruppe D_4 ist.

Aufgabe 3 *(5+5 Punkte)*
Sei
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R},\ ad \neq 0 \right\} < \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$
die Gruppe der oberen 2×2-Matrizen. (Sie brauchen nicht zu zeigen, dass dies eine Gruppe ist.)

(a) Zeigen Sie, dass
$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} \subset G$$
einen Normalteiler ist.

(b) Zeigen Sie, dass
$$G/N \simeq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*.$$

Hinweis: Benutzen Sie den ersten Isomorphiesatz.

Aufgabe 4 *(5 Punkte)*
Sei $\mathbb{W} \simeq S_4$ die Würfelgruppe und $X = \{1, 2, \ldots, 12\}$ die Menge der Diagonalen der Seitenflächen des regelmäßigen Würfels. Bestimmen Sie die Bahn und den Stabilisator einer dieser Diagonalen. Beschreiben Sie die Elemente des Stabilisators sorgfältig, beispielsweise mittels eine Skizze.

Bitte wenden!

Aufgabe 5 *(5 Punkte)*
Sei R ein kommutativer Ring und

$$I = \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0_R\}.$$

Zeigen Sie, dass I ein Ideal ist.

Aufgabe 6 *(5+5 Punkte)*

(a) Sei $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{-2}$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom

$$\min_{\mathbb{Q}(i)}(\alpha)$$

von α über $\mathbb{Q}(i)$. (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(b) Überprüfen Sie, ob das folgende Polynom irreduzibel ist:

$$x^3 + 3x^2 - 8 \in \mathbb{Q}[x].$$

Aufgabe 7 *(3+2+5 Punkte)*

(a) Berechnen Sie

$$\operatorname{ggT}(x^5 + x^2 + x + 1, x^3 + 1) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]$$

mittels des euklidischen Algorithmus.

(b) Ist

$$R := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]/(x^5 + x^2 + x + 1)$$

ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Zeigen Sie, dass

$$x + (x^5 + x^2 + x + 1) \in R$$

eine Einheit ist, indem Sie ein inverses Element bestimmen.