

Seminar über L -Funktionen

WS 2014/15

(vorläufiges) Programm

Unser Ziel in diesem Seminars ist es zu verstehen, warum gewisse L -Funktionen, die in der Zahlentheorie auftreten, eine Funktionalgleichung haben, und was das mit Modulformen zu tun hat. Damit werden wir eine erste Einführung in das *Langlands-Programm* bekommen.

Das klassische Beispiel ist die *Riemannsche ζ -Funktion*

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Zunächst ist $\zeta(s)$ nur für komplexe Werte s mit $\Re(s) > 1$ definiert. Riemann hat gezeigt, dass man $\zeta(s)$ zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen kann (mit einem einfachen Pol bei $s = 1$), die einer Funktionalgleichung genügt, bei der die Werte bei s und $1-s$ in Beziehung gesetzt werden. Der Beweis benutzt die Darstellung einer modifizierten ζ -Funktion als Mellin-Transformation der Jacobischen Theta-Funktion

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z}, \quad \Im(z) > 0.$$

Die Funktionalgleichung von $\zeta(s)$ folgt dann leicht aus der folgenden Funktionalgleichung für $\theta(z)$:

$$\theta(-1/z) = \sqrt{z/i} \cdot \theta(z),$$

d.h. aus der Tatsache, dass $\theta(z)$ eine *Modulform* vom Gewicht $1/2$ ist. Diesen Zusammenhang zwischen $\zeta(s)$ und $\theta(z)$ und der resultierende Beweis der Funktionalgleichung möchten wir verallgemeinern.

Die erste Verallgemeinerung stammt von Hecke. Hecke betrachtete sogenannte *Größencharaktere*

$$\chi : I_{\mathfrak{m}} \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

wobei $I_{\mathfrak{m}}$ die Gruppe der Ideale eines Zahlkörpers K bezeichnet, die teilerfremd zu einem gegebenen Ideal $\mathfrak{m}$ sind. Die Bedingung an χ ist, dass die Einschränkung auf die Untergruppe der Hauptideale $P_{\mathfrak{m}} = \{(\alpha) \mid \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}\}$ 'algebraisch' ist. Im Fall $K = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{m} = (m)$ und der Einschränkung, dass χ unitär ist, ist χ einfach ein Dirichlet-Charakter modulo m .

Zu einem Größencharakter χ kann man die L -Funktion

$$L(\chi, s) := \sum_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{m})=1} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{(\mathfrak{p}, \mathfrak{m})=1} \frac{1}{1 - \chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s}}$$

betrachten. Hecke zeigte mit ähnlichen Methoden wie Riemann, dass $L(\chi, s)$ analog zu $\zeta(s)$ eine analytische Fortsetzung und eine Funktionalgleichung besitzt. Der Beweis und die Gestalt der Funktionalgleichung sind allerdings recht

kompliziert und konzeptionell schwer zu erfassen. Insbesondere ist es nicht klar, wie man die Beiträge zur Funktionalgleichung als Produkt von ‘lokalen Faktoren’ schreiben kann.

Einen konzeptionelleren und moderneren Zugang zu den Ergebnissen von Hecke liefert *Tate’s Thesis*. Um Tate’s Thesis verstehen zu können, benötigt man zuerst die adelische Sprache. In dieser Sprache ist ein Größencharakter dasselbe wie ein *Hecke-Charakter*, also eine Charakter auf der Gruppe der *Idelklassen* von K ,

$$\chi : \mathbb{A}_K^\times / K^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Der Hauptvorteil dieser neuen Sprache ist, dass man konsequent lokale und globale Aspekte trennen kann; so ist zum Beispiel ein Hecke-Charakter ein Produkt lokaler Faktoren

$$\chi = \bigotimes_{\mathfrak{p}} \chi_{\mathfrak{p}},$$

und entsprechend teilt sich der Beweis der Funktionalgleichung von $L(\chi, s)$ in einen lokalen und einen globalen Teil auf. Weiterhin wird die lokale Zusammensetzung und die eigentliche Bedeutung der *lokalen Faktoren* und des *Führers* der L -Funktion transparent.

Vortrag 1: Die Riemannsche ζ -Funktion

- Definition und erste Eigenschaften von $\zeta(s)$
- Beweis der analytische Fortsetzung und der Funktionalgleichung mithilfe des *Mellin-Prinzips* und der Transformationsgleichung von $\theta(z)$ (der Beweis derselben erfolgt im 2. Vortrag)
- Kurzer Bericht über die Bedeutung der Lage der Nullstellen von $\zeta(s)$ für die analytische Zahlentheorie

Quellen: [5], Kapitel VII, §1.

Vortrag 2: Fourier-Transformation und die Poissonsche Summenformel

- Klassische Fouriertransformation und die Poissonsche Summenformel
- Anwendung: Transformationsgleichung für $\theta(z)$
- Haar-Maße und Fourier-Transformation auf lokal kompakten Gruppen
- Beispiel: $(\mathbb{Q}_p, +)$

Quelle: [4], Chapter XIII, §1.

Vortrag 3: Adele, Idele und Hecke-Charaktere

- Definition der Adele und Idele eines Zahlkörpers

- Zeige, dass $\mathbb{A}_K/K$ kompakt und die *Idelklassengruppe* $\mathbb{A}_K^\times/K^\times$ lokal kompakt ist.
- Definition von Hecke-Charakteren und die Zerlegung in lokale Faktoren
- Beweis der Äquivalenz zwischen Hecke- und Größencharakteren
- Explizite Beispiele, insbesondere der Spezialfall von Dirichlet-Charakteren

Quellen: [3], §1,2,5, [5], [6].

Vortrag 4: Tate's Thesis, I: die lokale Theorie

Quellen: [3], §3, [7], [4]

Vortrag 5: Tate's Thesis, II: die globale Theorie

Quellen: [3], §4, [7], [4]

Vortrag 6: Modulformen, I

Quellen: [2]

Vortrag 7: Modulformen, II

Quellen: [2]

Vortrag 8: Artinsche L -Funktionen

Quellen: [1]

Literatur

- [1] E. de Shalit. Artin L -functions. In J. Bernstein and S. Gelbart, editors, *An Introduction to the Langlands Program*, pages 109–132. Birkhäuser, 2004.
- [2] E. Kowalski. Classical automorphic forms. In J. Bernstein and S. Gelbart, editors, *An Introduction to the Langlands Program*, pages 109–132. Birkhäuser, 2004.
- [3] S.S. Kudla. Tate's Thesis. In J. Bernstein and S. Gelbart, editors, *An Introduction to the Langlands Program*, pages 109–132. Birkhäuser, 2004.
- [4] S. Lang. *Algebraic number theory*. Springer, 19??
- [5] J. Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie*. Springer, 1992.
- [6] J. Shurman. Hecke characters classically and idelically. lecture notes.
- [7] A. Weil. *Basic Number Theory*. Springer, 1974.