



Übungsblatt 10

Lineare Algebra

Die Abgabe ist möglich bis spätestens 10 Uhr am 12.1.2014 im Briefkasten vor H3.

»A mathematician is a device for turning coffee into theorems.«

— Paul Erdős

Aufgabe 1 (Bonusaufgabe zu Weihnachten)

(4*+3*+3*)

Passend zur Weihnachtszeit gibt es unter folgendem Link eine kleine Rätselaufgabe.

www.staybijective.de

Spielen Sie das Spiel unter dem angegebenen Link und versuchen Sie zu gewinnen. Wir wollen nun versuchen die Mathematik hinter diesem Spiel zu verstehen. Dazu treffen wir folgende Konventionen:

- Jedes Licht ist entweder an oder aus. Wir interpretieren diese Zustände entsprechend als 1 oder 0, d.h. als Werte in $\mathbb{F}_2$. Jeder Zustand der Lichter entspricht also einem Vektor b in $\mathbb{F}_2^9$.
- Unter einer *Strategie* verstehen wir eine Anweisung welche Schalter gedrückt werden sollen. Da die Reihenfolge in der man die Schalter betätigt keine Rolle spielt und einen Schalter zwei mal zu drücken das selbe Resultat hat wie ihn gar nicht zu drücken, können wir eine Strategie interpretieren als einen Vektor x in $\mathbb{F}_2^9$, wobei eine 1 an der Stelle k bedeutet, dass Schalter k gedrückt werden soll.

Ziel ist es nun zu einem Anfangszustand b eine Strategie x zu finden, durch die alle Lichter ausgeschaltet werden.

- (a) Zeigen Sie, dass es eine Matrix A gibt, so dass der Zustand b' , der aus b durch Anwenden der Strategie x entsteht, geschrieben werden kann als

$$b' = Ax + b.$$

- (b) Zeigen Sie, dass es zu jedem Anfangszustand eine Strategie x gibt durch die alle Lichter ausgeschaltet werden.
- (c) Finden Sie eine Anfangssituation, für die man mindestens 7 Schalter drücken muss um alle Lichter auszuschalten.

Aufgabe 2 (Äquivalenzrelationen)

(2+2)

Zwei Matrizen $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ heißen *äquivalent*, wenn es invertierbare Matrizen $S \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ und $T \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ gibt, mit $B = SAT$.

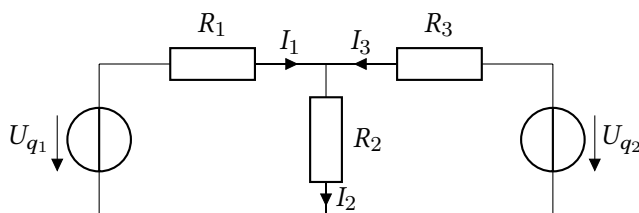
- (a) Zeigen Sie, dass Äquivalenz von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ genau dann äquivalent sind, wenn $\text{Rang } A = \text{Rang } B$ gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Elektrische Netzwerke)

(3+3+2)

Wir betrachten das folgende Modell eines elektrischen Schaltkreises. Die durchgezogenen Linien sind Leitungen, die Kreise stehen für Spannungsquellen und die Kästchen für Widerstände.



Wir wollen zu gegebenen ohmschen Widerständen $R_k \in \mathbb{R}_{>0}$ und konstanten Spannungen $U_{q_k} \in \mathbb{R}$ die Stromstärken $I_k \in \mathbb{R}$ berechnen. Dabei gibt das Vorzeichen die Richtung an und die eingezeichnete Richtung ist die positive.

Ohmsches Gesetz Der elektrische Widerstand R eines elektrischen Leiters ist das Verhältnis der anliegenden elektrischen Spannung U zur Stärke I des hindurchfließenden elektrischen Stromes.

Erstes Kirchhoffsches Gesetz In einem Knotenpunkt eines elektrischen Netzwerkes ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

Zweites Kirchhoffsches Gesetz Die Summe der Teilspannungen entlang eines geschlossenen Weges ist gleich Null.

- (a) Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem für die Stromstärken I_1 , I_2 und I_3 auf.
- (b) Zeigen Sie, dass dieses Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt.
- (c) Bestimmen Sie I_2 für die Werte $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 15\Omega$ und $U_{q1} = 90V$, $U_{q2} = 80V$.

Aufgabe 4 (Verschiedenes)

(2+3+3)

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Schreiben Sie dabei komplexe Zahlen stets in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 2 \\ 0 & 1+i & 1+2i \end{pmatrix}$$

- (b) Berechnen Sie eine Basis vom Kern der folgenden Matrix aus $M_{3,3}(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1+i & 2 \\ -1 & -i & -1 \\ 2+i & 1+2i & 3 \end{pmatrix}$$

- (c) Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Einträgen. Zeigen Sie: Die Matrix A^{-1} hat genau dann nur ganzzahlige Einträge, wenn $\det A = \pm 1$ gilt.