ulm university universität uulm

Prof. Dr. Irene Bouw
Christian Steck
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 12

Lineare Algebra

Die Abgabe ist möglich bis spätestens 10 Uhr am 26.1.2015 im Briefkasten vor H3.

»We can only see a short distance ahead, but we can see plenty there that needs to be done.«
— *Alan Turing*

Aufgabe 1 (*Fibonacci*) (1+3+2+2)

Wir betrachten die Fibonacci-Folge mit $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$ für $k \geq 2$.

(a) Finden Sie eine Matrix A mit $A\begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$.

(b) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A.

(c) Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$.

(d) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabenteil (c) die Formel $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Aufgabe 2 (*Nilpotente und Involutive Matrizen*) (2+1+2+2)

Seien $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ mit $A^m = 0$ für ein $m \geq 1$ und $B^2 = E_n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn A die Nullmatrix ist.

(b) Ist $0 \neq w \in \mathbb{R}^n$ kein Eigenvektor von B und $\tilde{w} = Bw$, so ist $W = \langle w, \tilde{w} \rangle$ zweidimensional.

(c) In der Situation von Aufgabenteil (b) bildet B Vektoren aus W wieder auf Vektoren aus W ab und die Vektoren $w + \tilde{w}$, $w - \tilde{w}$ bilden eine Basis von W aus Eigenvektoren von B.

(d) Zeigen Sie, dass B diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3 (*Diagonalisierbarkeit*) (3+3)

Überprüfen Sie die folgenden linearen Abbildungen auf Diagonalisierbarkeit über dem jeweils angegebenen Körper K.

(a) Sei $K = \mathbb{R}$ und $\varphi : K^3 \to K^3$ gegeben durch die Matrix

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -5 & -24 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $K = \mathbb{C}$ und $\varphi : K^4 \to K^4$ gegeben durch die Matrix

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (*Diagonalisierbarkeit 2*) (2+3+1)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \subset M_{3,3}(\mathbb{C}).$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $c_A(t)$ von A. Für welche $a,b \in \mathbb{R}$ hat c_A mehrfache Nullstellen?

(b) Bestimmen Sie alle a, $b \in \mathbb{R}$, so dass A reell diagonalisierbar ist.

(c) Bestimmen Sie alle a, $b \in \mathbb{R}$, so dass A komplex diagonalisierbar ist.

(Σ 27)