ulm university universität uulm

Prof. Dr. Irene Bouw
Christian Steck
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 13

Lineare Algebra

Die Abgabe ist möglich bis spätestens 10 Uhr am 2.2.2015 im Briefkasten vor H3.

»However impenetrable it seems, if you don't try it, then you can never do it.«
— *Andrew Wiles*

Aufgabe 1 (2+2+3+3)

Überprüfen Sie für die folgenden Abbildungen $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ jeweils, welche der Eigenschaften (SPI), (SPII), (SPIII) aus Definition 6.2.1 erfüllt sind.

(a) Sei $V = \mathbb{R}^n$, $x, y \in V$ und $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^n kx_k y_k$.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^4$, $x, y \in V$ und $\langle x,y\rangle = x^t Ay$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Sei $V = \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in V$ und

$$\langle x,y\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

(d) Sie $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ ein euklidischer Vektorraum, V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum und $T : W \to V$ ein Isomorphismus. Für $v_1, v_2 \in V$ setzen wir $\langle v_1, v_2\rangle = \langle T^{-1}v_1, T^{-1}v_2\rangle_W$.

Aufgabe 2 (*Skalarprodukt auf Matrizen*) (3+2+2+2)

In dieser Aufgabe betrachten wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = M_{n,n}(\mathbb{R})$ und die Matrizen $A, B \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\langle A,B\rangle = \operatorname{Spur}(B^t A)$ ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

(b) Wir schreiben $\|\cdot\|$ für die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm. Berechnen Sie

$$\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle, \quad \|E_n\|$$

(c) Seien $U_1 = \{A \in V \mid A^t = A\}$ und $U_2 = \{A \in V \mid A^t = -A\}$. Zeigen Sie $U_1 \perp U_2$.

(d) Zeigen Sie die Gleichung

$$\|A\|^2 = \|\frac{1}{2}(A + A^t)\|^2 + \|\frac{1}{2}(A - A^t)\|^2$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (*Gram-Schmidt*) (4+1)

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen Skalarprodukt und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 50 \\ -1 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

(a) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf das System (v_1, v_2, v_3) an.

(b) Was passiert, wenn man das Gram-Schmidt-Verfahren auf ein System von Vektoren (v_1, v_2, v_3) anwendet, welches nicht linear unabhängig ist?

Aufgabe 4 (*Zeige oder Widerlege*) (2+2+2)

Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Ist V ein euklidischer Vektorraum und $x, y \in V$, so gilt die Gleichung

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2.$$

(b) Es gibt ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ mit assoziierter Norm $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$.

(c) Ist V ein euklidischer Vektorraum und $u, v \in V$ mit $\|u\| = 3$, $\|u + v\| = 4$ und $\|u - v\| = 6$, so ist dadurch $\|v\|$ bereits eindeutig bestimmt.

(Σ 30)