Prof. Dr. Irene Bouw
Christian Steck
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 14

Lineare Algebra

Die Abgabe ist möglich bis spätestens 10 Uhr am 9.2.2015 im Briefkasten vor H3.

Dies ist das letzte Übungsblatt der Vorlesung.
Die Aufgaben sind relevant für die Klausur, die Punkte zählen jedoch als Bonuspunkte.
Bitte geben Sie das Übungsblatt nur zur Korrektur ab, wenn Ihnen noch Punkte für die Zulassung zur Klausur fehlen.

»Much more remains to be learned in the years to come.«

— *J.M. Gracia-Bondia, J.C. Varilly, H. Figueroa*

Aufgabe 1 (3+2+3+2)

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle) = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt, $\mathcal{E}$ die kanonische Basis von V. Wir betrachten den zweidimensionalen Unterraum $W = \langle (1,1,0)^t, (0,1,1)^t \rangle \subset V$.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von W und ergänzen Sie diese zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V.

(b) Sei $p_W : V \to V$ die orthogonale Projektion auf den Unterraum W. Bestimmen Sie $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_W)$.

(c) Sei $\sigma_W : V \to V$ die Spiegelung an W, berechnen Sie $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\sigma_W)$.

(d) Zeigen Sie: Für $x \in V$ ist $p_W(x)$ der Punkt in W mit dem kleinsten Abstand zu x, d.h. für alle Punkte $w \in W \backslash \{p_W(x)\}$ gilt die Ungleichung

$$\|x - w\| > \|x - p_W(x)\|.$$

Aufgabe 2 (1+3+4)

Seien $F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diagonalisierbar und es gelte $FG = GF$. Wir wollen zeigen, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$ gibt, bezüglich der sowohl die Darstellungsmatrix von F als auch die von G diagonal ist.

(a) Zeigen Sie, dass $E(F, \lambda)$ ein G-invarianter Unterraum ist.

(b) Folgern Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$ gibt, bezüglich der sowohl $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ als auch $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(G)$ diagonal sind.

Bemerkung: Ohne Beweis dürfen Sie verwenden, dass die Einschränkung $G|_U : U \to U$ auf einen G-invarianten Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ wieder diagonalisierbar ist.

Wir betrachten nun den Fall $n = 3$ und prüfen obige Aussage an einem Beispiel nach.

(c) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(G)$ diagonal sind, wobei

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 4 & 5 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass F und G diagonalisierbar sind und $FG = GF$ gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (*Aufgabe einer Altklausur*) (5)
Finden Sie alle Vektoren $(a, b, c)^t \in \mathbb{R}^3$, so dass

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & c \end{pmatrix}$$

die Matrix einer Drehung ist.

Aufgabe 4 (*Symmetrie des Würfels*) (1+1+2+3)
Sei $V = \mathbb{R}^3$ und W der Würfel mit den Eckpunkten $\pm v_1, \pm v_2, \pm v_3, \pm v_4$, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V ist und es eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\varphi(v_1) = v_2, \quad \varphi(v_2) = v_3, \quad \varphi(v_3) = v_4.$$

(b) Berechnen Sie den Wert $\varphi(v_4)$ und die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

(c) Berechnen Sie $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\varphi)$ und zeigen Sie $A \in O_3$.

(d) Finden Sie eine Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ die Normalform aus Satz 6.4.6 im Skript besitzt.

(Σ 30)