



Übungsblatt 3

Lineare Algebra

Die Abgabe ist möglich bis spätestens 10 Uhr am 10.11.2014 im Briefkasten vor H3.

»An expert is a person who has found out by his own painful experience all the mistakes that one can make in a very narrow field.«

— Niels Bohr

Aufgabe 1 (Dimension und Basis)

(3+2+3+2+3)

Bestimmen Sie, gegebenenfalls in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$, in den folgenden Teilaufgaben jeweils die Dimension und eine Basis von $U \subset V$. (Sie müssen nicht zeigen, dass U ein Unterraum von V ist.)

(a) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \langle (1, 2, -3), (-1, -1, 1), (-1, 1, -3), (3, 0, 3) \rangle$.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $U = \langle (0, 1, 1), (4, 1, 0), (1, \alpha, \alpha^2) \rangle$.

(c) Sei $V = \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und U der Durchschnitt der Ebenen

$$E_1 = \{s(0, \alpha, 1) + t(1, \alpha, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}, \quad E_2 = \{p(1, 0, 1) + q(-1, \alpha, 0) \mid p, q \in \mathbb{R}\}.$$

(d) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \text{Lös} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, 0_V \right)$.

(e) Sei $V = M_{2,3}(\mathbb{R})$ und $U = \{A \in V \mid A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}\}$.

Aufgabe 2 (Nochmal Dimension und Basis)

(2+4)

Sei $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Teilmengen

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in V \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \in V \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass U_1 und U_2 Unterräume von V sind.

(b) Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von V, U_1, U_2 und $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 3 (Austauschsatz)

(2+4)

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$, das System $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ und die Menge $S = \{w_1, w_2\}$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ und S die Voraussetzungen für den Austauschsatz erfüllen.

(b) Verfahren Sie wie im Beweis zum Austauschsatz um zwei der Vektoren aus $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ durch w_1 und w_2 zu ersetzen.

Aufgabe 4 (Basisergänzungssatz)

(5)

In dieser Aufgabe sei V ein n -dimensionaler Vektorraum und $U \subset V$ ein $(n-r)$ -dimensionaler Untervektorraum, wobei $0 \leq r \leq n$. Zeigen Sie, dass es Unterräume $H_1, \dots, H_r$ der Dimension $n-1$ in V gibt, welche $U = H_1 \cap \dots \cap H_r$ erfüllen.

Bemerkung: Ein Unterraum der Dimension $n-1$ heißt auch *Hyperebene*.

(Σ 30)