ulm university universität
uulm

Prof. Dr. Irene Bouw
Christian Steck
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 4

Lineare Algebra

Die Abgabe ist möglich bis spätestens 10 Uhr am 17.11.2014 im Briefkasten vor H3.

»The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds the most discoveries, is not ›Eureka!‹ but ›That's funny...‹«

— *Isaac Asimov*

Aufgabe 1 (*Symmetrische und antisymmetrische Matrizen*) (2+2+3+2)

Sei $V = M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $A = (a_{ij}) \in V$. Die Matrix $A^t = (a_{ji})$ heißt transponierte Matrix. Wir betrachten

$$U_1 = \left\{A \in V \mid A = A^t\right\}, \quad U_2 = \left\{A \in V \mid A = -A^t\right\}.$$

Bei U_1 bzw. U_2 handelt es sich um die Untervektorräume (dies müssen Sie nicht zeigen) der symmetrischen bzw. antisymmetrischen Matrizen.

(a) Zeigen Sie: Für $A \in V$ ist $(A + A^t) \in U_1$ und $(A - A^t) \in U_2$.

(b) Zeigen Sie $\dim U_1 = \frac{1}{2}(n^2 + n)$, $\dim U_2 = \frac{1}{2}(n^2 - n)$.

(c) Bestimmen Sie $\dim(U_1 \cap U_2)$ und $\dim(U_1 + U_2)$. Schließen Sie $V = U_1 \oplus U_2$.

(d) Sei $n = 3$. Schreiben Sie die folgenden Matrizen jeweils als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -3 & -5 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (*Polynominterpolation*) (3+2+4+2)

Sei $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ der Raum der Polynome vom Grad höchstens n. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass zu paarweise verschiedenen Werten $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ die folgenden Polynome eine Basis von V bilden:

$$p_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - c_j}{c_i - c_j}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Ferner betrachten wir für $0 \leq r \leq n$ den Untervektorraum $U_r = \{f \in V \mid f(c_0) = \ldots = f(c_r) = 0\}$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von U_r in Abhängigkeit von n und r.

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von n und r einen Untervektorraum $W_r \subset V$ mit $V = U_r \oplus W_r$.

Sei nun $n = 3$ und Punkte $P_i = (c_i, d_i)$ gegeben durch $P_0 = (3,1), P_1 = (4,1), P_2 = (5,9), P_3 = (2,6)$.

(c) Bestimmen Sie ein Polynom $f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in V$ mit $f(c_i) = d_i$, indem Sie ein entsprechendes lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_3$ aufstellen.

(d) Bestimmen Sie ein Polynom $g = b_0 p_0 + \ldots + b_3 p_3 \in V$ mit $g(c_i) = d_i$.

Bemerkung: Hier erkennt man sehr schön, dass für manche Anwendungen eine geeignete Basis deutliche Vorteile bringt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (*Denken oder Rechnen*) (4+2)

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ und die folgenden Vektoren und Untervektorräume:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\\2\end{pmatrix}, \quad W = \langle v_1, v_1 + v_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\3\\5\end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$U_1 = \langle v_2, v_2 + v_3\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\3\\5\end{pmatrix} \right\rangle, \quad U_2 = \langle v_3, v_3 + v_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\6\\4\end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis für $U_1 \cap W$, $U_2 \cap W$, $U_1 + W$ und $U_2 + W$.

(b) Zeigen Sie $U_1 \neq U_2$ und $U_1 + W = U_2 + W$.

Aufgabe 4 (*Zeige oder Widerlege*) (2+2)

Geben Sie für die folgenden Aussagen jeweils entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Sind $f_0, \ldots, f_n \in P_n(\mathbb{R})$ mit $f_j(1) = 0$ für alle j, so ist das System $(f_0, \ldots, f_n)$ linear abhängig.

(b) Ist V ein Vektorraum mit Untervektorräumen U_1, U_2 und W, welche $U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$ erfüllen, so gilt bereits $U_1 = U_2$.

(Σ 30)