ulm university universität uulm

Prof. Dr. Irene Bouw
Christian Steck
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 5

Lineare Algebra

Die Abgabe ist möglich bis spätestens 10 Uhr am 24.11.2014 im Briefkasten vor H3.

»No one gets excited about vector spaces. The interesting part of linear algebra is the subject to which we now turn – linear maps.«

— *Sheldon Axler*

Aufgabe 1 (*Lineare Abbildungen*) (5+6)

Wir betrachten die folgenden Abbildungen zwischen Vektorräumen V und W.

(i) Sei $V = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$ und $\varphi : x \mapsto 2x - 1$.

(ii) Sei $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $W = \mathbb{R}$, $c_0 \in \mathbb{R}$ und $\varphi : f \mapsto f(c_0)$.

(iii) Sei $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $W = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ und $\varphi : f \mapsto f'' + f(0)$.

(iv) Sei $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $W = \mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ und $\varphi : f \mapsto f' \cdot f''$.

(v) Sei $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$ und $\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 - x_2 + 3x_3, 7x_1 + 5x_2 - 6x_3)$.

(a) Untersuchen Sie die obigen Abbildungen auf Linearität.

(b) Bestimmen Sie von den linearen Abbildungen aus Aufgabenteil (a) jeweils eine Basis von Kern und Bild.

Aufgabe 2 (*Existenz linearer Abbildungen*) (2+3+3)

Überprüfen und begründen Sie jeweils, ob es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit den angegebenen Eigenschaften gibt.

(a) $\varphi(0,1,0) = (1,2)$, $\varphi(1,0,2) = (4,1)$.

(b) $\varphi(1,0,1) = (2,0)$, $\varphi(1,2,1) = (4,0)$, $\varphi(1,4,2) = (7,-1)$, $\varphi(3,2,1) = (6,3)$.

(c) Sei $L = \{(1,0,1) + t(1,2,3) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\varphi(x) = (1,1)$ für alle $x \in L$ und $\varphi(0,1,0) = (2,3)$.

Aufgabe 3 (*Symmetrische und antisymmetrische Matrizen – Fortsetzung*) (3+3)

Wir betrachten den Vektorraum $V = M_{n,n}(\mathbb{R})$ und die Abbildung $p : V \to V$, $A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^t)$.

(a) Zeigen Sie, dass p eine lineare Abbildung ist und $p \circ p = p$ erfüllt.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Bild} p$ und $\operatorname{Kern} p$ und schließen Sie $V = \operatorname{Bild} p \oplus \operatorname{Kern} p$.

Aufgabe 4 (*Lagrange Interpolation – Fortsetzung*) (3+2)

Seien $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene reelle Zahlen. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad f \mapsto (f(c_0), \ldots, f(c_n)).$$

(a) Zeigen Sie, dass φ eine bijektive lineare Abbildung ist.

(b) Geben Sie die Umkehrabbildung zu φ an.

(Σ 30)