



Übungsblatt 6

Lineare Algebra

Die Abgabe ist möglich bis spätestens 10 Uhr am 1.12.2014 im Briefkasten vor H3.

»Everything must be made as simple as possible. But not simpler.«

— Albert Einstein

Aufgabe 1 (Orthogonale Projektion)

(2+3+2+4)

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$, die Untervektorräume

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

und die folgenden Basen von V :

$$\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Zeigen Sie, dass V die direkte Summe von U und W ist, d.h. es gilt $V = U \oplus W$.

Wir betrachten nun zusätzlich die Abbildung $p : V \rightarrow V$, $u + w \mapsto u$ mit $u \in U$ und $w \in W$.

(b) Zeigen Sie, dass p eine lineare Abbildung ist und $p \circ p = p$ erfüllt.

(c) Bestimmen Sie Bild p und Kern p .

(d) Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p)$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p)$.

Aufgabe 2 (Darstellungsmatrizen)

(6+2)

Wir betrachten die folgenden Abbildungen

$$\varphi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \quad f \mapsto t \cdot f,$$

$$\psi : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f \mapsto \begin{pmatrix} f(1) \\ f'(1) \\ f''(1) \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ eine Basis von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}' = (1, t, t^2, t^3)$ eine Basis von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ und $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Verwenden Sie Definition 3.2.3 um die Darstellungsmatrizen $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}'}(\psi)$ und $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\psi \circ \varphi)$ zu bestimmen.

(b) Berechnen Sie das Matrixprodukt $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}'}(\psi) \cdot M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ und überprüfen Sie die Formel aus Satz 3.3.3.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (*Zeige oder Widerlege*)

(2+2+2)

Geben Sie für die folgenden Aussagen jeweils entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

- (a) Ist $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$\text{Kern } \varphi = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 5x_2, x_3 = 7x_4\},$$

so ist φ surjektiv.

- (b) Sind U, V, W Vektorräume und $\varphi : U \rightarrow V$, $\psi : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen derart, dass die Verknüpfung $\psi \circ \varphi : U \rightarrow W$ ein Isomorphismus ist, so sind auch φ und ψ Isomorphismen.

- (c) Es gibt keine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\text{Kern } \varphi = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 3x_2, x_3 = x_4 = x_5\}.$$

Aufgabe 4 (*Matrixmultiplikation*)

(5)

Berechnen Sie alle möglichen Produkte der folgenden Matrizen.

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -5 \\ -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$