Prof. Dr. Irene Bouw
Christian Steck
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 7

Lineare Algebra

Die Abgabe ist möglich bis spätestens 10 Uhr am 8.12.2014 im Briefkasten vor H3.

»You cannot expect to read mathematics the way you read a novel. If you zip through a page in less than an hour, you are probably going too fast.«

— *Sheldon Axler*

Aufgabe 1 (*Koordinatenwechsel*) (4+2)

Es sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $V = \mathbb{R}^3$ und

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

eine andere Basis von V. Sei ferner $\varphi : V \to V$ gegeben durch die Matrix

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 10 & 36 & -18 \\ 6 & 25 & -12 \\ 18 & 72 & -35 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$.

(b) Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ indem Sie Aufgabenteil (a) verwenden.

Aufgabe 2 (*Rotationsmatrizen*) (2+4)

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Sei ferner $\theta \in [0, 2\pi)$ und $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix},$$

eine weitere Basis von V und $L = \langle v_1 \rangle$ die Gerade, welche mit der positiven e_1-Achse den Winkel $\theta/2$ einschließt. Wir betrachten $\rho_\theta : V \to V$ die Drehung um den Winkel θ entgegen dem Uhrzeigersinn, und $\sigma : V \to V$ die Spiegelung an der e_1-Achse.

(a) Berechnen Sie $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\sigma \circ \rho_\theta \circ \sigma)$ und schließen Sie $\sigma \circ \rho_\theta \circ \sigma = \rho_{-\theta}$.

(b) Berechnen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\rho_\theta \circ \sigma)$ und schließen Sie, dass $\rho_\theta \circ \sigma$ die Spiegelung an der Geraden L ist.

Bemerkung: Verwenden Sie die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus.

Aufgabe 3 (*Zeige oder Widerlege*) (2+2+2)

Geben Sie für die folgenden Aussagen jeweils entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Sind $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertierbare Matrizen, so ist auch $A + B$ invertierbar.

(b) Ist $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ Matrix mit $A^2 + A = 0$, so ist A nicht invertierbar.

(c) Ist $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ Matrix mit $A^2 + A + E_n = 0$, so ist A invertierbar.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (*Tetraeder*) (2+2+4+2+2)

Sei $V = \mathbb{R}^3$ und T der Tetraeder mit den Eckpunkten v_1, v_2, v_3, v_4, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V ist und es eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\varphi(v_1) = v_1, \ \varphi(v_2) = v_3, \ \varphi(v_3) = v_4.$$

(b) Berechnen Sie $\varphi(v_4)$ und schließen Sie, dass φ die Menge $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ wieder auf $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ abbildet.

(c) Berechnen Sie $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ und $B = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi)$, wobei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(d) Zeigen Sie $A^3 = B^3 = E$.

(e) Zeigen Sie $\varphi^3 = \mathrm{Id}$.

Bemerkung: In der Abbildung rechts sehen Sie den in der Aufgabe beschriebenen Tetraeder. Die angegebene Abbildung φ bildet den Tetraeder auf sich selbst ab, eine solche Abbildung nennt man auch *Symmetrie*.

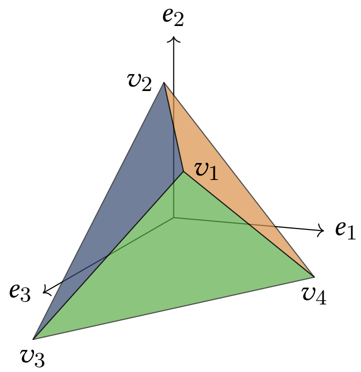

Abbildung 1: Ein Tetraeder in $\mathbb{R}^3$