ulm university universität uulm

Prof. Dr. Irene Bouw
Christian Steck
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 8

Lineare Algebra

Die Abgabe ist möglich bis spätestens 10 Uhr am 15.12.2014 im Briefkasten vor H3.

»Parity is for farmers.«

— *Seymour Cray*

Aufgabe 1 (*Prüfbit – Parity Bit*) (2+2+1)

Sei $x = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{F}_2^k$ ein Wort der Länge k. Wir fügen dem Wort ein Prüfbit c_{k+1} definiert durch $c_{k+1} = c_1 + \dots + c_k \in \mathbb{F}_2$ hinzu und erhalten das Codewort $c = (c_1, \dots, c_k, c_{k+1}) \in \mathbb{F}_2^{k+1}$. Mit φ bezeichnen wir die Abbildung, die ein Wort x auf das entsprechende Codewort c abbildet, also

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{F}_2^k &\to \mathbb{F}_2^{k+1}, \\ (c_1, \dots, c_k) &\mapsto (c_1, \dots, c_k, c_1 + \dots + c_k). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von Kern φ und Bild φ.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $M^{\mathcal{E}_k}_{\mathcal{E}_{k+1}}(\varphi)$.

(c) Alice möchte ein Wort x an Bob senden. Sie fügt über die Abbildung φ ein Prüfbit hinzu und verschickt das Codewort $c = \varphi(x)$ über einen verrauschten Kanal. Am anderen Ende des Übertragungskanals erhält Bob das Codewort

$$r = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0).$$

Wurde die Nachricht fehlerfrei übertragen?

Aufgabe 2 (*Spur von Matrizen und linearen Abbildungen*) (2+2+3+1+2)

Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix mit Einträgen a_{ij}. Wir definieren die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathrm{Spur} : M_{n,n}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}, \\ A &\mapsto \sum_{k=1}^{n} a_{kk}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur} : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie $\dim(\mathrm{Kern}\,\mathrm{Spur})$ und $\dim(\mathrm{Bild}\,\mathrm{Spur})$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

(c) Sei zusätzlich $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass für invertierbare $T \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ stets $\mathrm{Spur}\,A = \mathrm{Spur}(T^{-1}AT)$ gilt.

Ist nun V ein beliebiger endlichdimensionaler Vektorraum, so definiert man die Spur einer linearen Abbildung $\varphi : V \to V$ über die Darstellungsmatrix von φ zu einer beliebigen Basis $\mathcal{B}$ von V, d.h. es ist

$$\mathrm{Spur}\,\varphi = \mathrm{Spur}\,M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi).$$

(e) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}\,\varphi$ nicht von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ abhängt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (*Rang von Matrizen*) (1+2+3)

In dieser Aufgabe betrachten wir die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad C \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ mit den Einträgen } c_{ij} = i + j.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Bestimmen Sie den Rang von B in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie den Rang von C in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 (*Lösen von Gleichungssystemen*) (3+2+1+2+1)

In dieser Aufgabe betrachten wir die folgenden Matrizen und Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie, welche der Vektoren b_1, b_2 in Bild A liegen und schreiben Sie diese wenn möglich als Linearkombination der Spalten von A.

(b) Finden Sie eine Matrix $S = E_1 \cdot E_2$ mit Elementarmatrizen E_1, E_2, so dass $\tilde{A} = SA$ in Zeilenstufenform ist.

(c) Berechnen Sie für $i \in \{1,2\}$ die Vektoren $\tilde{b}_i = Sb_i$.

(d) Überprüfen Sie, welche der Vektoren $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ in Bild $\tilde{A}$ liegen und schreiben Sie diese wenn möglich als Linearkombination der Spalten von $\tilde{A}$.

(e) Vergleichen Sie die in Aufgabenteil (a) und (d) berechneten Linearkombinationen. Was fällt Ihnen auf?