ulm university universität uulm

Prof. Dr. Irene Bouw
Christian Steck
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 9

Lineare Algebra

Die Abgabe ist möglich bis spätestens 10 Uhr am 22.12.2014 im Briefkasten vor H3.

»Mathematics education is much more complicated than you expected, even though you expected it to be more complicated than you expected.«

— *Edward Griffith Begle*

Aufgabe 1 (*Rechenübungen zur Determinante*) (3+2+3)

In dieser Aufgabe betrachten wir die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie die Determinante von $B \in M_{3,3}(\mathbb{F}_2)$ über $\mathbb{F}_2$.

(c) Berechnen Sie die Determinante von $C \in M_{4,4}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2 (*Begleitmatrix*) (5+1)

Für $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ betrachten wir die $(n \times n)$-Matrix

$$A_n(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Für $n = 1$ setzt man $A_1(a_0) = (t + a_0)$. Ferner definieren wir $d_n(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \det(A_n(a_0, \ldots, a_{n-1}))$.

(a) Zeigen Sie die Rekursionsgleichung $d_n(a_0, \ldots, a_{n-1}) = t d_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}) + a_0$ und folgern Sie per Induktion $d_n(a_0, \ldots, a_{n-1}) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$.

(b) Sei $f(t) = t^4 + 2t^3 + 3t^2 - 5t - 4$. Finden Sie eine Matrix $B \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ mit $\det(tE_4 - B) = f(t)$.

Bemerkung: Die Matrix B heißt auch *Begleitmatrix* von f.

Aufgabe 3 (*Determinanten von großen Matrizen*) (5+3)

In dieser Aufgabe betrachten wir die folgenden Matrizen:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R}), \quad B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R}).$$

(a) Es sei d_n die Determinante von A_n. Zeigen Sie die Rekursionsgleichung $d_{n+1} = 2d_n - d_{n-1}$ und folgern Sie per Induktion $d_n = n + 1$.

(b) Zeigen Sie $\det B_n = (-1)^{n+1} \cdot n$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (*Determinante von linearen Abbildungen*) (1+1+2+4)

In dieser Aufgabe wollen wir, ähnlich wie auf Blatt 8 für die Spur, die Determinante einer linearen Abbildung definieren.

(a) Zeigen Sie, dass für eine Matrix $A \in M_{n,n}(K)$ und eine invertierbare Matrix $T \in M_{n,n}(K)$ stets $\det(T^{-1}AT) = \det A$ gilt.

Sei nun V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Analog zu Blatt 8 - Aufgabe 2 definieren wir

$$\det \varphi = \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi).$$

(b) Zeigen Sie, dass $\det \varphi$ wohldefiniert ist.

(c) Zeigen Sie $\det \varphi \neq 0 \Leftrightarrow \varphi$ ist ein Isomorphismus.

(d) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden linearen Abbildungen:

(i) $\varphi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}),\ f \mapsto f + f'$,

(ii) $p : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,n}(\mathbb{R}),\ A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^t)$, für $n \geq 2$.

(Σ 30)